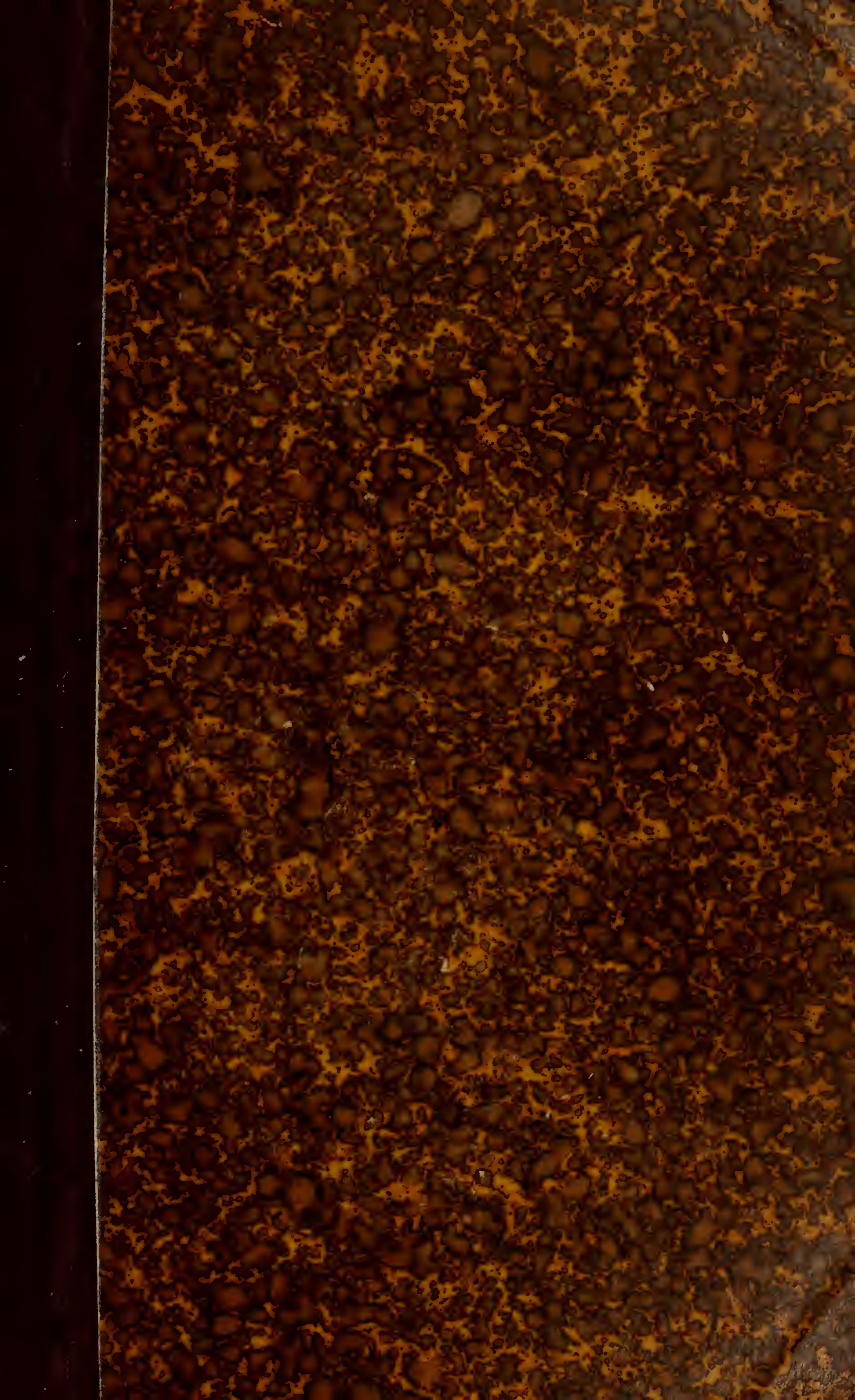








Handbuch

der

algebraischen Analysis

von

Dr. Oskar Schlömilch,
Geh. Schulrath im K. S. Cultusministerium.

Sechste Auflage. 2. Druck.

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten.

Stuttgart
(vormals Jena)
Friedrich Frommann's Verlag (E. Hauff)
1889.

Vorrede
zur dritten Auflage.

Als ich in der Vorrede zur zweiten Auflage erklärte, dafs ich der sogenannten algebraischen Analysis keine eigentliche wissenschaftliche Berechtigung, sondern nur das Interesse zugestehen könne, welches die genauere Bearbeitung jedes bestimmt abgegrenzten Wissensgebietes für sich hat, glaubte ich nicht an die Möglichkeit einer ferneren Auflage des vorliegenden Werkes. Wenn gleichwohl eine dritte Auflage nothwendig geworden ist, so scheint diefs zu beweisen, dafs jenes Interesse sich über einen gröfseren Kreis von Lesern erstreckt, und es hat mich diese Thatsache ermuthigt, noch einmal Hand ans Werk zu legen.

Die Anordnung des Stoffes und der allgemeine Gedankengang sind ungestört geblieben; um aber eine kürzere und präcisere Darstellung zu gewinnen und um gleichzeitig den Fortschritten der Wissenschaft Rechnung zu tragen, habe ich die ersten zwölf Capitel fast gänzlich umgearbeitet. Das nächste Zeugnifs hiervon giebt Capitel II, worin die hauptsächlichsten Grenzwerthe auf einfachere und elegantere Weise als früher abgeleitet sind. Die geometrischen Anwendungen der Lehre von den Grenzwerthen (Quadraturen und Cubaturen) wurden auf den Begriff des mittleren Werthes einer Function gegründet (Cap. IV), welcher seine Bedeutung auch dann noch behält, wenn man jene Anwendungen weglassen will. In der Lehre von der Convergenz der unendlichen Reihen sind die §§. 27, 29 und 30 hinzugekommen, womit diese Theorie zu einem gewissen Abschlusse gelangt. Bei den unendlichen Reihen in Capitel VI – IX habe ich überall eine Restuntersuchung vorgenommen, einerseits um für die numerische Summirung die Fehlergrenze zu bestimmen, andererseits um nachherige

Grenzenübergänge mit Sicherheit ausführen zu können, denn bekanntlich ist der Grenzwerth von der Summe einer unendlichen Reihe nicht immer identisch mit der Summe von den Grenzwerthen der einzelnen Summanden. Dafs hierdurch manche neue Betrachtungsweise nothwendig wurde (wie z. B. in den §§. 45 und 46), versteht sich von selbst; hoffentlich sind mit diesen und einigen weiteren Änderungen in den Capiteln X und XI alle Anforderungen an die wissenschaftliche Strenge befriedigt.

Auf Wunsch mehrer erfahrenen Freunde habe ich anhangsweis die Theorie der höheren Gleichungen so weit entwickelt, als diefs auf elementarem Wege geschehen konnte; ich will nur wünschen, dafs mein Buch dadurch an Brauchbarkeit gewonnen haben möge.

Dresden, im October 1861.

Schlömilch.

Vorrede

zur vierten Auflage.

Da sich die dritte Auflage des vorliegenden Werkes einer durchaus beifälligen Aufnahme zu erfreuen hatte und da andererseits die Fortschritte, welche die Wissenschaft in den letzten Jahren gemacht hat, von keinem wesentlichen Einflufs auf die Gestaltung der algebraischen Analysis gewesen sind, so lag für mich kein Grund zu bedeutenden Änderungen des Buches vor. Ich habe nur, wo es nöthig schien, eine präcisere Fassung eintreten lassen, hie und da einige Erläuterungen oder Beispiele hinzugefügt, bei den hauptsächlichsten Resultaten aber die historischen Quellen angegeben. Zahlreiche Beispiele zu den hier vorgetragenen Lehren findet man in der „Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis, von Prof. Joh. Lieblein“ (Prag, Verlag v. Satow, 1867), welche sich dem gegenwärtigen Handbuche genau anschliefst und hiermit empfohlen sein möge.

Dresden, im Mai 1868.

Schlömilch.

Vorrede

zur fünften Auflage.

Die in der Vorrede zur vierten Auflage angegebenen Gründe haben mich auch bei der jetzigen neuen Auflage bestimmt, von wesentlichen Umgestaltungen des Buches abzusehen. Dagegen wird man im Einzelnen manche Verbesserungen finden wie z. B. bei der Ableitung der unendlichen Producte für die trigonometrischen Functionen und bei der Untersuchung über die Werthe der cyclometrischen Functionen complexer Variabelen.

Dresden, im Juli 1873.

Schlömilch.

Vorrede

zur sechsten Auflage.

Da sich das vorliegende Werk darauf beschränkt, eine elementare Theorie der Functionen und Reihen zu geben, so hat dasselbe bei der gegenwärtigen sechsten Auflage keine bedeutenden Änderungen erfahren, denn die zahlreichen neueren Eroberungen der Wissenschaft berühren jenes eng begrenzte Gebiet nur wenig. Hinzugefügt wurden: in §. 11 das Nöthigste über die Grenzwerthe der Functionen zweier Variabelen, in §. 26 ein neuer Fall von simultaner Convergenz und Divergenz zweier Reihen, in §. 54 mehrere neue Sätze, welche dem Theoreme von Cotes analog sind. Dagegen ist im Anhange die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen weggelassen worden, da sie in jedem Lehrbuche der Algebra behandelt zu werden pflegt.

Dresden, im April 1881.

Schlömilch.

Inhalt.

Cap. V. Die unendlichen Reihen.

Cap. VI. Der binomische Satz.

Cap. VII. Die Reihen für Exponentialgröfsen und Logarithmen.

Cap. VIII. Die goniometrischen Reihen.

Cap. IX. Die cyclometrischen Reihen.

Cap. X. Die Functionen complexer Variabelen.

Cap. XI. Die complexen Reihen und Producte.

Cap. XII. Die Kettenbrüche.

Cap. XIII. Die Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche.

Anhang.

Einleitung.

Jede Arithmetik, welchen Namen sie auch führen möge, beschäftigt sich lediglich mit Zahlen, und daher ist jede Rechnung nichts Anderes als ein, nach einer vorgeschriebenen Regel ausgeführter Übergang von einer Stelle der Zahlenreihe zur andern, wobei es gleichgültig bleibt, ob man sich die Zahlen als specielle denken will, wie bei den bürgerlichen Rechnungen, oder als allgemeine und willkürliche, wie sie in der Buchstabenrechnung vorkommen. So hat es denn auch die algebraische Analysis oder allgemeine Arithmetik, wie man sie öfters nennt, nur mit Zahlen zu thun; in welcher Weise aber diefs geschieht und welche Stellung die algebraische Analysis der Buchstabenrechnung gegenüber einnimmt, das läfst sich nur erkennen, wenn man vorher über die Leistungen der niederen Arithmetik vollständig orientirt ist. Wir geben daher zunächst einen Überblick über den Gedankengang und die Resultate des ebengenannten Theiles der Mathematik.

Nichts ist einfacher als die Entstehung der Zahl. Wer eine Vielheit von Gegenständen irgend welcher Art vor sich sieht, hat zunächst nur den unbestimmten Begriff einer gewissen Menge; Bestimmtheit erhält dieser Begriff erst dann, wenn jener ungeordnete Haufe aufgeräumt wird und die einzelnen Objecte in eine Reihe gestellt sind. Es erhält nämlich bei dieser Anordnung jeder Gegenstand seinen bestimmten Platz, und die Vorstellung dieser Stelle, welche das entsprechende Object in der angenommenen Reihenfolge einnimmt, ist eben die Zahl. So entsteht zunächst die natürliche Zahlenreihe (1, 2, 3 etc.), und diese bildet vor der Hand das einzige Material der Arithmetik.

Als Grundlage für jedwedes Rechnen dient der Übergang von einer Zahl zu ihrer Nachbarin, eine Operation, welche man passend mit einem Schritte vergleichen kann. Geht man nun von einer Zahl

a aus um so viel Schritte weiter als eine andere Zahl b anzeigt, so hat man die Addition in ihrer einfachsten Gestalt; die Zahl c, zu welcher man bei diesem Fortgange gelangt, ist die Summe von a und b, nämlich $c = a + b$. Sieht man umgekehrt die Summe c als gegeben an und ebenso einen der Summanden, etwa a, so entsteht die Aufgabe der Subtraction, die Umkehrung der Addition. Hier ist zweierlei zu bemerken, erstens nämlich, dafs es nur eine solche Umkehrung giebt, weil $a + b = b + a$ ist, und es mithin gleichgültig bleibt, ob man b aus c und a, oder a aus c und b bestimmen will. Der zweite bemerkenswerthe Umstand ist, dafs es Fälle geben kann, in welchen die Subtraction unausführbar wird; da nämlich die Zahlenreihe, im Sinne des Fortschrittes genommen, unbegrenzt ist, so stöfst die Addition niemals auf eine Schwierigkeit, bei dem Rückschritte dagegen kann es sich treffen, dafs man aus der in dieser Richtung durch die Eins begrenzten Zahlenreihe herausgeräth, wie z. B. bei $4 - 4$ oder $5 - 7$, und es sind daher solche Differenzen vor der Hand als unmögliche Zahlen zu betrachten, weil es eben unmöglich ist, in der bisherigen Reihe eine Zahl zu finden, welche aus einer derartigen Subtraction entstanden wäre.

Durch Wiederholung der Addition, d. h. durch Addition mehrerer gleicher Summanden, gelangt man zur nächsten Rechnungsart, der Multiplication, und es bedeutet hier ab zunächst weiter nichts als die Summe von a Summanden, deren jeder $= b$ ist. Setzt man $ab = c$ und sieht jetzt das Product c und einen der Factoren, etwa a, als bekannt an, so entsteht die Aufgabe, den anderen Factor b zu bestimmen, und diese Umkehrung der Multiplication ist die Division. Hier wiederholen sich dieselben zwei Bemerkungen, die wir vorhin bei der Subtraction machten; weil nämlich die Anordnung der Factoren keinen Einflufs auf das Product ausübt, so ist es in Beziehung auf die Art der Rechnung gleichgültig, ob man b oder a sucht, und es giebt daher nur eine Umkehrung der Multiplication. Ferner kann es sich treffen, dafs die Division unmöglich wird, was der Multiplication nie begegnet, und es tritt diese Unmöglichkeit hier jedesmal ein, wenn der Dividend kein Vielfaches des Divisors ist. Ausdrücke wie $\frac{3}{4}$ oder $\frac{11}{5}$ sind daher vor der Hand als unmögliche Zahlen zu bezeichnen.

Aus der wiederholten Multiplication entsteht nun weiter die Potenzirung, und zwar bedeutet hier a^b das Product von b Factoren, deren jeder $= a$ ist. Verglichen mit der Addition und Multiplication

zeigt die Potenzirung die Eigenthümlichkeit, dafs keine Vertauschung der Zahlen a und b vorgenommen werden darf, wenn die Potenz ungeändert bleiben soll; mit anderen Worten, es ist im Allgemeinen a^b nicht $= b^a$. Aus eben diesem Grunde hat die Operation des Potenzirens zwei Umkehrungen, weil man die Fälle unterscheiden mufs, ob in der Gleichung $a^b = c$ aus b und c die Grundzahl a, oder aus a und c der Exponent b bestimmt werden soll; das erste giebt die Wurzelausziehung ($\sqrt[b]{c}$), das zweite die Aufsuchung des Logarithmus (*log* c für a als Basis, oder kürzer ${}^a log\ c$). Wiederum findet hier die Bemerkung statt, dafs die Operation des Potenzirens jederzeit ausführbar ist, während die umgekehrten Operationen auf Unmöglichkeiten stofsen können, wie z. B. bei $\sqrt[3]{7}$ oder ${}^4 log$ 10.

So wie nun bisher aus den einzelnen Schritten die Addition, aus dieser die Multiplication und hieraus die Potenzirung gebildet wurde, so könnte man es auch versuchen, durch wiederholte Potenzirung eine neue Rechnungsart zu schaffen; bemerkt man aber, dafs die Potenz einer Potenz wiederum eine Potenz ist, so erkennt man auf der Stelle, wie mit einer solchen Wiederholung jener Operation nichts Neues gewonnen wird. Es schliefst sich hiermit die Reihe der Rechnungsoperationen, welche demnach drei ursprüngliche (directe) und vier abgeleitete (indirecte) Operationen enthält. Gleichwohl ist aber die Arithmetik defswegen nicht als abgeschlossen zu betrachten; denn wenn auch ein Zuwachs an neuen Operationen nicht mehr zu erwarten ist, so kann doch die Aufgabe gestellt werden, die vorhandenen Operationen unter allen Umständen ausführbar zu machen, und es entspringt diese Aufgabe naturgemäfs aus der Bemerkung, dafs die indirecten Operationen in vielen Fällen unmöglich wurden. Diese Unmöglichkeit liegt aber nicht in dem Begriffe jener Operationen (denn die Forderung z. B., von 4 aus um 7 Schritte rückwärts zu gehen, enthält keinen Widerspruch in sich), sondern einzig und allein in dem Mangel an Zahlen, an der Einseitigkeit und Lückenhaftigkeit der Zahlenreihe. Jene Unmöglichkeit verschwindet daher, sobald man das Zahlengebiet passend erweitert, und auf welche Weise diese Erweiterung vorzunehmen sei, das müssen die indirecten Operationen selbst zu erkennen geben.

So führt uns die Subtraction zunächst auf den Begriff der Null und der negativen Zahlen, wodurch sich die bisher einseitig unbegrenzte Zahlenreihe zu einer nach beiden Seiten hin unbegrenzten erweitert (positive und negative ganze Zahlen). Um ferner die Di-

vision ausführbar zu machen, bedarf es der Aufstellung solcher Zahlen, die in gleichen Abständen von einander zwischen je zwei Zahlen der bisherigen Reihe enthalten sind; so erscheinen die Brüche (positive und negative) als eingeschaltete Zwischenglieder jener Zahlenreihe. Das Wurzelausziehen nöthigt zu einer weiteren Interpolation der Zahlenreihe, welche sich aber von der vorhergehenden in so fern unterscheidet, als man eine zwischen zwei ganzen Zahlen liegende Irrationalzahl durch eine Theilung des Intervalles in gleiche Theile nicht erreichen kann. Die Erscheinung der Irrationalzahlen berechtigt nun, sich an jeder beliebigen Stelle der Zahlenreihe eine Zahl zu denken, d. h. mit anderen Worten, die ursprünglich lückenhafte Zahlenreihe wird zur lückenlosen, die punktirte Zahlenlinie zu einer ununterbrochenen. Diefs ist das für den weiteren Fortgang der Arithmetik bedeutendste Resultat der Buchstabenrechnung, und es erreicht letztere ihr Ende, sobald sie diesen Nachweis geliefert und zugleich die Regeln angegeben hat, nach welchen mit beliebig aus der Zahlenreihe herausgegriffenen Zahlen die sieben Grundoperationen vorzunehmen sind. Was endlich die Bedeutung der imaginären Zahlen anbelangt, so wird der Verlauf dieses Werkes selbst darauf hinführen.

Capitel I.

Von den veränderlichen Gröfsen und den Functionen im Allgemeinen.

§. 1.

Grundbegriffe und Aufgaben der algebraischen Analysis.

Der ununterbrochene Fortgang der Zahlenreihe, welchen die niedere Arithmetik am Ende ihrer Betrachtungen nachweist, gestattet eine Operation, deren Einfachheit nicht minder grofs ist als ihre Wichtigkeit. Das ursprünglichste Verfahren nämlich, um von einer Zahl a zu einer anderen b zu gelangen, bestand darin, dafs man von a aus in einzelnen Schritten (a, $a + 1$, $a + 2$ etc.) weiter ging, bis man auf die Zahl b traf; jeder solcher Schritte bildete einen Sprung, in so fern anfangs zwischen den einzelnen ganzen Zahlen keine Zwischenstufen existirten. Die Brüche aber geben die Möglichkeit an die Hand, die Weite dieser Sprünge bis zu jedem beliebigen Grade der Kleinheit zu vermindern, und sie dienen hierbei als Zwischen-

stufen von gleicher Gröfse. Stellen wir dazu noch beliebige Irrationalzahlen, so lassen sich zwischen a und b willkürlich viele Zwischenstufen von ebenso willkürlichen verschiedenen Gröfsen einschalten, und es kann nun der Übergang von a nach b ohne alle Sprünge, d. h. mit Durchlaufung aller möglichen Zwischenstufen, erfolgen; ein solcher Übergang heifst ein stetiger oder continuirlicher, jeder andere ein unstetiger, sprungweiser oder discontinuirlicher. Wir können uns jetzt auch eine Zahl x denken, welche erst den Werth a besafs und nachher durch stetigen Übergang den Werth b erhielt, und es hat dieser Procefs die gröfste Ähnlichkeit mit der stetigen geradlinigen Bewegung eines Punktes von einer Stelle des Raumes zur anderen. Diese Vorstellung einer stetig veränderlichen Zahl bildet die Grundlage alles höheren Calcüls und ihre Wichtigkeit wird sofort aus der Bemerkung erhellen, dafs eine Anwendung der Arithmetik auf die stetig veränderlichen Gröfsen des Raumes und der Zeit unmöglich sein würde, wenn nicht auch die Zahl als stetig veränderlich angesehen werden könnte.

Nach dieser Erörterung über das Wesen der stetig veränderlichen Zahl oder Gröfse bedarf es noch eines äufseren Unterscheidungszeichens für dieselbe, da es sich treffen kann, dafs in einer und derselben Rechnung veränderliche und unveränderliche Zahlen vorkommen, die zu verwechseln man sich hüten mufs. Für diesen Zweck ist es allgemein üblich geworden, die unveränderlichen oder constanten Gröfsen mit den ersten Buchstaben des Alphabets $a, b, c \dots$ zu bezeichnen, für die veränderlichen oder variabelen Gröfsen dagegen die letzten Buchstaben, wie $t, x, y, z,$ zu brauchen. In einem Ausdrucke wie $ax + b$ bezeichnet daher x nicht eine unbekannte Gröfse, wie in der Algebra, sondern eine unbestimmte, welche bei stetiger Änderung alle möglichen Zahlenwerthe durchlaufen kann, wogegen a und b festbestimmte Zahlen bedeuten, welche sich nicht ändern, während x andere und andere Werthe erhält.

Diese Unterscheidung führt von selbst um einen bedeutenden Schritt weiter, wenn man die Bemerkung hinzubringt, dafs jede Rechnung, die etwas mehr als unbestimmte Beziehungen enthalten will, am Faden der Gleichungen fortlaufen mufs. Setzen wir nämlich einen beliebigen Ausdruck, worin constante Gröfsen mit einer Variabeln verbunden vorkommen, einer neuen Gröfse gleich, also etwa unser obiges

$$ax + b = y,$$

so ist die neue Gröfse y offenbar wieder eine veränderliche; denn wenn x andere und andere Werthe annimmt, so ändern sich auch

die Werthe von y. Aber diese Veränderungen sind nicht willkürlich; eine Änderung des x zieht eine ganz bestimmte Änderung des y nach sich; z. B. für zwei bestimmte Zahlenwerthe von x, die wir mit x_1 und x_2 bezeichnen wollen, kommen auch ein paar bestimmte entsprechende Werthe von y, etwa y_1 und y_2, heraus, so dafs ist

$$ax_1 + b = y_1 \text{ und } ax_2 + b = y_2.$$

Nehmen wir nun an, dafs x_2 um eine bestimmte Gröfse δ gröfser sei als x_1, mithin $x_2 = x_1 + \delta$, so haben wir

$$y_2 = a(x_1 + \delta) + b = ax_1 + b + a\delta$$

$$\text{d. h. } y_2 = y_1 + a\delta$$

wenn also x sich um δ ändert, so ändert sich y um $a\delta$, mithin hängt die Veränderung des y von der des x ab und zwar auf fest bestimmte Weise. Noch auffallender tritt diefs an dem folgenden Beispiele hervor. Es sei u eine ganz beliebig veränderliche Gröfse und

$$u^2 + c = v$$

so ist offenbar auch v eine Variable, aber nicht so willkürlich als u. Denn wenn c eine positive Zahl bedeutet, so ist für alle möglichen positiven oder negativen u das Quadrat u^2, folglich auch $u^2 + c$, mithin jenes v positiv und es existirt kein Werth von u, für welchen $u^2 + c$ oder v negativ werden könnte. Trotz der gänzlichen Unbestimmtheit des u ist also doch durch die Natur der Gleichung die Veränderlichkeit von v eingeschränkt und ihr als Spielraum nur das Gebiet der positiven Zahlen angewiesen. Man mufs daher unabhängige und abhängige veränderliche Gröfsen unterscheiden; die ersteren sind solche, denen man willkürlich jeden beliebigen Werth beilegen darf, die letzteren diejenigen, deren Veränderungen durch die stetigen Veränderungen einer anderen unabhängig veränderlichen Gröfse nach irgend einem Gesetze bedingt sind. Dieses Gesetz selbst spricht sich in irgend einer analytischen Formel aus, welche die unabhängig veränderliche Gröfse enthält (wie oben $ax + b$). Jeden solchen Ausdruck, in welchem eine unabhängig veränderliche Gröfse auftritt, nennt man eine Function dieser Veränderlichen. Demnach sind alle beliebigen Ausdrücke wie

$$ax,\ x^a,\ a^x,\ \sqrt{b^2 - x^2},\ log\ x,\ sin\ x \text{ etc.}$$

sämmtlich Functionen von x, die sich nur dadurch unterscheiden, dafs in jeder die Art des Vorkommens der Hauptgröfse eine andere, oder wie man auch sagt, dafs jede anderer Natur ist. Zur Bezeichnung der Functionen im Allgemeinen bedient man sich der Buchstaben F, f, φ, ψ oder ähnlicher, welchen man denjenigen Buchstaben, der die in der Function vorkommende Veränderliche bezeichnet, in

Parenthesen eingeschlossen auf der rechten Seite beisetzt*). Symbole wie $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ bedeuten also nichts Anderes, als gewisse, nicht näher bestimmte Rechnungsausdrücke, in welchen eine unabhängig veränderliche Gröfse vorkommt, wobei durch die verschiedenen Buchstaben F, f, φ, ψ zugleich angezeigt wird, dafs in jeder der genannten vier Functionen x auf verschiedene Weise vorkommt, oder dafs jede anderer Natur ist. Hiernach ist nun der Sinn einer Gleichung wie

$$y = f(x)$$

folgender: die Gröfse y läfst sich dadurch aus x ableiten, dafs man mit x irgend welche noch nicht näher bestimmte analytische Operationen vornimmt, und daher ist y an x so gebunden, dafs jedem bestimmten Werthe von x ein gleichfalls bestimmter Werth von y entspricht.

Es kann eine Function auch zwei oder mehrere unabhängig veränderliche Gröfsen zugleich enthalten. So ist z. B. der Ausdruck $ax + cz$, in welchem x und z zwei von einander unabhängige beliebige Gröfsen bezeichnen, eine Function von x und z zugleich, weil er sich ändert, wenn x oder z allein eine Änderung erleidet. Setzt man $ax + cz = y$, so bezeichnet man die Abhängigkeit des y von x und z zugleich durch die Gleichung

$$y = f(x,\ z) \text{ oder } y = \varphi(x,\ z) \text{ etc.}$$

Ebenso würden nun entsprechend $f(x, z, t)$, $\varphi(x, z, u, v)$ etc. Functionen von drei und mehr Veränderlichen andeuten.

Sehen wir uns nun zunächst im Gebiete der niederen Arithmetik nach Functionen um, so finden wir als einfachste

$$a + x, \quad a - x, \quad bx, \quad \frac{c}{x}$$

welche dadurch entstehen, dafs man mit der Variabeln die vier einfachsten arithmetischen Operationen vornimmt. Hierauf folgt naturgemäfs die Potenz, welche zu zwei verschiedenen Functionen Veranlassung giebt, jenachdem man die Basis oder den Exponenten als unabhängige Variable ansieht. So erhalten wir die Functionen

$$x^b \text{ und } a^x$$

von denen die erste in der Analysis den Namen Potenz ausschliefslich führt, während die zweite sehr passend Exponentialgröfse heifst. Da die Constante b auch gebrochen oder negativ sein kann, so begreift die Potenz zugleich die Functionen

*) Bisweilen läfst man wohl der Kürze wegen die Parenthesen weg und setzt z. B. schlechthin fx statt $f(x)$. Eine solche Schreibweise ist aber defswegen nicht zu empfehlen, weil man bei ihr das Operationszeichen f leicht mit einem Coefficienten verwechselt.

$$\sqrt[m]{x^n} \text{ und } \frac{1}{x^\alpha}$$

in sich. Als letzte Function von arithmetischer Abkunft stellt sich noch der Logarithmus dar, den man bei constanter Basis und veränderlicher Zahl mit

$${}^a log\ x$$

zu bezeichnen pflegt.

Die Allgemeinheit, welche im Begriffe der Function liegt, erlaubt uns, noch ein paar Schritte weiter zu gehen und auch solche Functionen in Betrachtung zu ziehen, die nicht ursprünglich arithmetischer Abstammung sind. Beachten wir also aufser dem Gehalte der Arithmetik noch den der Geometrie und Trigonometrie, so stellen die goniometrischen Verhältnisse wiederum Beispiele einer gegenseitigen Abhängigkeit von Gröfsen dar, in so fern zu jedem Bogen ein bestimmter Sinus, Cosinus etc. gehört. Denken wir uns den Bogen x jederzeit in Theilen des Halbmessers ausgedrückt*), so giebt es zu jeder abstracten Zahl x einen Sinus, Cosinus etc. und man hat daher die goniometrischen Functionen

$$sin\ x,\ cos\ x,\ tan\ x,\ cot\ x,\ sec\ x,\ csc\ x.$$

An diese reihen sich noch sechs andere, welche die Umkehrungen derselben sind. Sehen wir nämlich die Variable x nicht als Bogen an, wie vorhin, sondern bezeichnen wir damit einen gegebenen Sinus, so gehört zu demselben ein ganz bestimmter spitzer Bogen, welchen man mit

$$arc\ (sin = x) \text{ oder } arcsin\ x$$

bezeichnet; hiernach ist z. B.

$$arcsin\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \qquad arcsin\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \qquad arcsin\ 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Bei negativen x nimmt man auch den Bogen negativ nach Analogie der Formel $sin\ (-u) = -\ sin\ u$, z. B.

$$arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad arcsin\ (-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Ebenso versteht man unter $arccos\ x$ den kleinsten aller der Bögen, deren Cosinus die Länge x haben, z. B.

---

*) Wäre der Bogen ursprünglich in Graden gegeben, so dafs er etwa g^0 fafste, so würde die Proportion

$$180^0 : g^0 = \pi : x, \text{ also } x = \frac{g}{180}\pi$$

gelten, und dadurch bestimmt sich eben jenes x, wovon oben die Rede ist.

$$arccos\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \qquad arccos\ 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}, \qquad arccos\ (-1) = \pi.$$

Ferner bezeichnet $arctan\ x$ denjenigen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen, dessen Tangente $= x$ ist, wobei dem Bogen dasselbe Vorzeichen gegeben wird, welches x besitzt, z. B.

$$arctan\ 1 = \frac{\pi}{4}, \qquad arctan\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \qquad arctan\ \infty = \frac{\pi}{2},$$

$$arctan\ (-1) = -\frac{\pi}{4}, \qquad arctan\ (-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Wie man auf ähnliche Weise die Functionen $arccot\ x$, $arcsec\ x$ und $arccsc\ x$ definiren kann, ist unmittelbar ersichtlich; die so erhaltenen sechs Functionen heifsen cyclometrische.

Was nun die Aufgabe der algebraischen Analysis anbelangt, so ist dieselbe eine doppelte. Sie hat erstlich mit den Mitteln, welche die Algebra bietet, die allgemeinen Eigenschaften der Functionen so weit als möglich zu erforschen, und zweitens die Resultate dieser Untersuchung speciell auf die bisher genannten Functionen anzuwenden. Die algebraische Analysis zerfällt demnach in zwei Haupttheile, deren erster als eine elementare Theorie der allgemeinen Eigenschaften der Functionen, und deren zweiter als specielle Theorie der einfachen Functionen bezeichnet werden kann, wobei wir die bisher genannten Functionen unter der Benennung „einfache Functionen" zusammenfassen.

§. 2.

Die cyclometrischen Formeln.

Da in den Lehrbüchern der Trigonometrie die cyclometrischen Functionen nicht behandelt zu werden pflegen, so schalten wir an dieser Stelle die Entwickelung der cyclometrischen Grundformeln ein.

I. Bezeichnet u einen Bogen des ersten Quadranten, x seinen Sinus, so hat man folgende Gleichungen

$$sin\ u = x, \qquad cos\ u = \sqrt{1-x^2},$$

$$tan\ u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad cot\ u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

von denen jede zur Bestimmung des u dienen kann; es ist daher

$$1) \quad \begin{cases} arcsin\ x = arccos\ \sqrt{1-x^2} \\ = arctan\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = arccot\ \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \end{cases}$$

Nennen wir ferner z die Tangente des Bogens u, so haben wir

$$tan\ u = z, \quad cot\ u = \frac{1}{z},$$

$$cos\ u = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad sin\ u = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

mithin umgekehrt

$$2) \quad \begin{cases} arctan\ z = arccot\frac{1}{z} \\ = arccos\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = arcsin\ \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}. \end{cases}$$

II. Das Complement des Bogens $arcsin\ x$ hat x zum Cosinus; daher ist

$$3) \qquad arcsin\ x + arccos\ x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Das Complement des Bogens $arctan\ z$ hat z zur Cotangente; diefs giebt

$$4) \qquad arctan\ z + arccot\ z = \tfrac{1}{2}\pi.$$

III. Ist wieder u ein Bogen des ersten Quadranten, so haben alle die Bögen

$$u, \ \pm\pi - u, \ \pm 2\pi + u, \ \pm 3\pi - u, \ \pm 4\pi + u, \ \pm 5\pi - u, \ \ldots .$$

einen und denselben Sinus; überhaupt ist

$$sin\ u = sin\left[\tfrac{1}{2}\pi \mp (\tfrac{1}{2}\pi - u) \pm 2k\pi\right],$$

wobei man der Reihe nach $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zu setzen und für jeden individuellen Werth von k erst das obere und dann das untere Zeichen zu nehmen hat. Bezeichnet x den gemeinschaftlichen Werth aller jener Sinus, so folgt $u = arcsin\ x$, weil u im ersten Quadranten liegt; wird dagegen ganz unbestimmt die Gleichung $sin\ w = x$ gegeben, ohne dafs man vorher weifs, in welchem Quadranten w liegt, so kann w alle die Werthe u, $\pi - u$, $2\pi + u$, $3\pi - u$ etc. haben; die allgemeine Formel für w ist daher

$$w = \tfrac{1}{2}\pi \mp (\tfrac{1}{2}\pi - u) \pm 2k\pi.$$

Mit anderen Worten, alle Wurzeln der Gleichung

$$sin\ w = x$$

sind in der Formel

$$w = \tfrac{1}{2}\pi \mp (\tfrac{1}{2}\pi - arcsin\ x) \pm 2k\pi$$

enthalten, wenn $k = 0, 1, 2, 3$ etc. gesetzt wird.

Bezeichnen u und v zwei Bögen des ersten Quadranten und ist

$$sin\ u = x, \qquad sin\ v = y$$

mithin

$$u = arcsin\ x, \qquad v = arcsin\ y,$$

so hat man

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$
$$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

mithin nach dem Vorigen

$$u+v = \tfrac{1}{2}\pi \mp [\tfrac{1}{2}\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}] \pm 2k\pi$$

oder zufolge der Werthe von u und v

$$\arcsin x + \arcsin y$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \mp [\tfrac{1}{2}\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})] \pm k\pi.$$

Hier ist noch zu bestimmen, ob das obere oder untere Zeichen, und welcher Werth für k genommen werden soll. Die Summe zweier Bögen des ersten Quadranten giebt nun entweder einen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, oder einen zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegenden Bogen; daher ist $k = 0$ und im Falle $u + v < \frac{1}{2}\pi$ das untere, dagegen für $u + v > \frac{1}{2}\pi$ das obere Zeichen zu nehmen. Um aber zu entscheiden, ob der erste oder zweite Fall stattfindet, berechnen wir $\cos(u+v)$, weil dieser Ausdruck positiv oder negativ ist, jenachdem $u+v$ im ersten oder zweiten Quadranten liegt. Es ergiebt sich

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$
$$= \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy = \frac{1-(x^2+y^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}+xy},$$

und nach allen bisherigen Bemerkungen folgt nun im ersten Falle

$$5)\quad \begin{cases} \arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \\ \qquad x^2 + y^2 \leqq 1, \end{cases}$$

dagegen im zweiten Falle

$$6)\quad \begin{cases} \arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \\ \qquad x^2 + y^2 \geqq 1. \end{cases}$$

Durch ganz ähnliche Schlüsse gelangt man zu der Formel

$$7)\quad \arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}),$$

bei welcher es keiner Unterscheidung bedarf, weil die Differenz zweier Bögen des ersten Quadranten immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

IV. Ist wieder u ein Bogen des ersten Quadranten, so haben alle die Bögen

$$u,\ \pm\pi + u,\ \pm 2\pi + u,\ \pm 3\pi + u,\ \ldots.$$

dieselbe Tangente, weil immer

$$\tan u = \tan(u \pm k\pi).$$

Für $\tan u = x$ ist $u = \arctan x$; aus der allgemeinen Gleichung

$$\tan w = x$$

folgt dagegen

$$w = u \pm k\pi = \arctan x \pm k\pi.$$

Sind ferner u und v zwei Bögen des ersten Quadranten, so ist für $\tan u = x$ und $\tan v = y$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{x+y}{1-xy},$$

mithin

$$u + v = \arctan \frac{x+y}{1-xy} \pm k\pi.$$

oder vermöge der Werthe von u und v

8) $$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} \pm k\pi.$$

Hier sind wie früher zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder liegt $\arctan x + \arctan y = u + v$ im ersten Quadranten, dann ist $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ positiv, mithin $\sin u \sin v < \cos u \cos v$ oder $\tan u \tan v < 1$ d. h. $xy < 1$. In diesem Falle mufs $k = 0$ sein, weil sonst ein Bogen $> \pi$ oder ein negativer Bogen zum Vorschein käme, also

9) $$\begin{cases} \arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}, \\ xy \leqq 1. \end{cases}$$

Beträgt dagegen $u + v$ mehr als $\frac{1}{2}\pi$, so ist $xy > 1$ und aus der Gleichung 8) wird

$$\arctan x + \arctan y = - \arctan \frac{x+y}{xy-1} \pm k\pi.$$

Damit nun rechter Hand gleichfalls ein Bogen des zweiten Quadranten erscheine, mufs $k = 1$ mit dem oberen Zeichen genommen werden, also

10) $$\begin{cases} \arctan x + \arctan y = \pi - \arctan \dfrac{x+y}{xy-1}, \\ xy > 1. \end{cases}$$

Durch ganz ähnliche Schlüsse gelangt man zu der Formel

11) $$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy},$$

bei welcher keine Unterscheidung nöthig ist, weil die Differenz zweier Bögen des ersten Quadranten immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

§. 3.

Die verschiedenen Arten von Functionen.

Die grofse Unbestimmtheit, welche in dem allgemeinen Begriffe der Function liegt, macht eine Eintheilung der Functionen in Classen nöthig, wobei man als Eintheilungsgrund die verschiedenen Rech-

nungsoperationen nimmt, aus welchen die Functionen hervorgehen. Man theilt nun gewöhnlich die arithmetischen Operationen in zwei Classen, von denen die erste die Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens und Potenzirens für constante Exponenten, wozu auch das Wurzelausziehen gehört, in sich begreift und die andere alle übrigen Arten von Operationen umfaſst. Die Operationen der ersten Classe nennt man algebraische, die der zweiten Classe transscendente und theilt hiernach die Functionen in algebraische und transscendente. Zu den ersteren gehören alle Functionen, in welchen mit der darin enthaltenen veränderlichen Gröſse bloſs algebraische Operationen vorgenommen werden, zu den zweiten die, in welchen die Veränderliche transscendenten Operationen unterworfen wird. Auf die Art und Weise, in welcher die constanten Gröſsen der Function auftreten, wird bei dieser Unterscheidung keine Rücksicht genommen.

Die algebraischen Functionen theilt man noch in rationale und irrationale. Zu den ersteren gehören alle diejenigen, in welchen die veränderliche Gröſse unter keinem Wurzelzeichen, oder was das Nämliche ist, mit keinem gebrochenen Exponenten behaftet vorkommt, vorausgesetzt, daſs man alle angedeuteten Rechnungen so weit als möglich ausgeführt, also die Function selbst auf den möglichst einfachen Ausdruck reducirt hat. Die letztere Bemerkung ist deſshalb nicht ganz überflüssig, weil eine Function als nicht rational erscheinen kann, so lange man sie nicht so weit als möglich reducirt hat, z. B. die Function

$$(\sqrt{a} + \sqrt{x})\ (\sqrt{a} - \sqrt{x})$$

die man beim ersten Anblick nicht zu den rationalen rechnen würde, die aber in der That dazu gehört, weil sie sich bei Ausführung der Multiplication auf $a - x$ reducirt. Kommen dagegen in einer Function Wurzelzeichen vor, die sich nicht durch bloſse Reduction wegschaffen lassen, so heiſst dieselbe eine irrationale.

Man unterscheidet bei den algebraischen Functionen auch noch ganze und gebrochene. Zu den ersten rechnet man die, in deren Nenner die veränderliche Gröſse selbst nicht vorkommt, zu den zweiten die, in welchen die Variable auch im Nenner auftritt. So sind z. B.

$$a + bx + cx^2 \text{ und } \sqrt{a^2 - b^2x^2}$$

eine rationale und eine irrationale ganze Function, dagegen

$$\frac{a + bx}{c + dx^2} \text{ und } \frac{a - \sqrt{x}}{x}$$

eine rationale und irrationale gebrochene algebraische Function.

Da in einer rationalen algebraischen Function keine anderen Rechnungsoperationen als die vier Species und die Erhebung auf eine Potenz von ganzen Exponenten vorkommen dürfen, so sieht man leicht, dafs eine ganze Function dieser Art unter der allgemeinen Form

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m$$

stehen mufs, in welcher A_0, A_1, ... A_m constante Zahlen (gleichviel ob ganze oder Brüche) bedeuten, von denen natürlich auch eine oder mehrere $= 0$ oder negativ sein können. Der höchste aller vorkommenden Exponenten bestimmt den Grad der Function. In unserem Falle ist die Function vom Grade m, weil die einzelnen Glieder nach den steigenden Potenzen von x geordnet sind, also der letzte Exponent m der gröfste ist. Eine gebrochene rationale algebraische Function läfst sich immer auf das allgemeine Schema

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n}$$

bringen, in welchen B_0, B_1, ... B_n ebenfalls constante Zahlen sind. Die Differenz der höchsten vorkommenden Exponenten, also hier $m - n$, giebt dann den Grad der Function an.

Es kann auch der Fall eintreten, dafs man wohl im voraus weifs, eine gewisse Gröfse sei eine Function einer anderen vorhandenen Gröfse, dafs man aber die Form dieser Function nicht angeben kann. Z. B. wenn x und y beliebige Gröfsen bedeuten, kann die Gleichung

$$xy - ax + by = c$$

nur dann bestehen, wenn y eine gewisse Function von x und ebenso umgekehrt x eine gewisse Function von y ist. Denn wenn man dem x einen beliebigen Werth giebt, so ist y schon nicht mehr willkürlich und sein Werth kann durch Auflösung der Gleichung nach y gefunden werden. Ebenso verhält es sich umgekehrt mit x. In solchen Fällen, wo man zwar weifs, dafs die eine Gröfse eine Function der anderen sei, ohne dafs man ihre Form näher zu bestimmen im Stande ist, nennt man die eine Gröfse eine unentwickelte oder ungesonderte Function der anderen. Kann man aber die Form näher angeben, so hat man eine entwickelte oder gesonderte Function. Diese Sonderung der Veränderlichen würde sich in der oben angeführten Function leicht durch beiderseitige Subtraction von ab bewirken lassen; man erhält dann

$$(x + b)\ (y - a) = c - ab$$

und daraus

$$x = -b + \frac{c - ab}{y - a}, \quad y = a + \frac{c - ab}{x + b}.$$

Ebenso ist in der Gleichung

$$u + x \sin u = 0$$

u so lange eine ungesonderte Function von x, als man nicht eine Gleichung von der Form $u = \ldots$ aufweisen kann, aus welcher für jedes beliebige x das zugehörige u berechnet werden könnte.

Es giebt endlich noch eine Eintheilung der Functionen, welche sich nicht auf die Operationen, sondern auf gewisse Eigenschaften derselben gründet. Manche Functionen besitzen nämlich die Eigenschaft, dafs sie nach einem gewissen Intervalle wieder die Werthe annehmen, die sie früher schon einmal gehabt haben, wie z. B. der Sinus, in welchem $\sin(2\pi + x) = \sin(4\pi + x) = \sin(6\pi + x) \ldots = \sin x$ ist; Functionen dieser Art heifsen periodische, während alle anderen, welchen die genannte Eigenschaft abgeht, nichtperiodische heifsen. Das Kennzeichen einer periodischen Function $f(x)$ ist, dafs es eine constante Gröfse a giebt, für welche

$$f(x) = f(a + x) = f(2a + x) = f(3a + x) \ldots$$

wird, wobei man a das Intervall oder den Index der Periodicität nennen kann. Für $f(x) = \sin x$ beträgt dasselbe 2π, für $f(x) = \tan x$ ist $a = \pi$. In der niederen Analysis scheiden sich durch diese Eintheilung die goniometrischen Functionen von den übrigen.

§. 4.

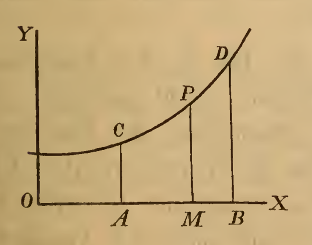
Die geometrische Darstellung der Functionen.

Man kann sich von einer Function einer einzigen Variabelen sehr leicht ein geometrisches Bild verschaffen, wenn man den in einer Gleichung wie

$$y = f(x)$$

vorkommenden Veränderlichen eine geometrische Bedeutung unterlegt. Das einfachste in dieser Beziehung ist, dafs man die Zahlen x und y als die Längen gerader Linien ansieht und letztere nach irgend einem Maafsstabe construirt, indem man eine Gerade von willkürlich festgesetzter Länge als die Linie Eins annimmt. Um aber die zusammengehörigen Werthe von x und y übersichtlich bei einander zu haben, pflegt man eine unbestimmt lange Gerade OX (Fig. 1) als Basis und einen festen Punkt O in ihr als Ausgangspunkt der Construction

Fig. 1.



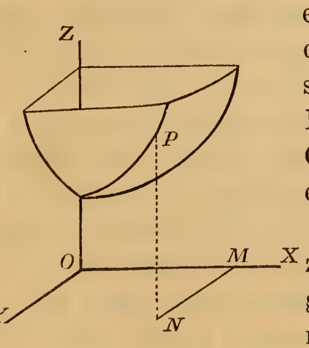
zu wählen und zwar in der Weise, dafs man die verschiedenen Geraden, welche die individuellen Werthe von x darstellen, jedesmal von O aus abschneidet ($OM = x$) und die zugehörigen Geraden, welche die entsprechenden Werthe von y angeben, senkrecht an den Endpunkten jener Strecken errichtet ($MP = y$). Mit anderen Worten, und in der Sprache der analytischen Geometrie ausgedrückt, heifst Diefs: man denke sich die unabhängige Variable x als Abscisse und die abhängige Variable als rechtwinklige Ordinate irgend eines Punktes in der Ebene. Da y nicht willkürlich ist, sondern im Gegentheil aus x durch gewisse Rechnungsoperationen abgeleitet werden kann, so erhält man durch diese Construction nicht willkürliche Punkte in der Ebene, sondern solche, die mit einer gewissen Regelmäfsigkeit auf einander folgen und in dieser Regelmäfsigkeit irgend eine gerade oder krumme Linie bilden. Diese Linie, von welcher $y = f(x)$ die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten ist, stellt nun das geometrische Bild der Function $f(x)$ dar.

Auf analoge Weise lassen sich auch die Functionen zweier Variabelen geometrisch construiren. Denken wir uns in der Gleichung

$$z = f(x, y)$$

die Variabelen x, y, z, von denen die ersten beiden die unabhängigen sind, als rechtwinklige räumliche Coordinaten, so entsteht folgende Construction. Durch die beiden willkürlichen Coordinaten x und y wird zunächst ein völlig beliebiger Punkt N in einer Ebene (der Coordinatenebene xy) bestimmt; errichtet man in diesem Punkte eine Senkrechte von der Länge z auf jener Ebene, so erhält man einen Punkt im Raume, von welchem x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten sind, wie $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ in Fig. 2. Jedem Punkte N der Ebene xy entspricht jetzt ein Punkt P im Raume, von welchem N die Horizontalprojection darstellt; der Gesammtheit aller in der Ebene xy liegenden Punkte entspricht demnach eine räumliche Gesammtheit von Punkten, oder kürzer eine Fläche.

Fig. 2.



Weiter als bis zu den Functionen zweier Variabelen reicht indessen die geometrische Darstellung der Functionen nicht; denn um die Functionen einer Veränderlichen zu construiren, bedurften wir zweier Dimensionen (für die unabhängige und abhängige Variabele),

indem wir die Construction in der Ebene ausbreiteten; für die Darstellung der Functionen zweier Variabelen waren drei Dimensionen nöthig, und mithin würden zur Construction der Functionen von drei oder mehreren Variabelen vier oder noch mehr Dimensionen des Raumes erforderlich werden, die für uns wenigstens nicht existiren. Hier wird also der Calcül der Anschauung überlegen, ein Phänomen, welches man öfter zu beobachten Gelegenheit finden wird.

Capitel II.

Die Grenzwerthe der Functionen.

§. 5.

Begriff der Grenze. Beispiele.

Da in einer Function die veränderliche Gröfse alle möglichen Werthe annehmen darf, so kann man dieselbe auch auf die Weise sich verändern lassen, dafs sie von irgend einer Stelle an sich beständig vergröfsert und gröfser als jede angebbare Zahl werden kann. Hierdurch wird nun auch eine beständige Veränderung in den Werthen der Function herbeigeführt werden, die sich bei der unbestimmten Allgemeinheit, welche in dem Begriffe der Function liegt, schlechthin nicht angeben lässt. Ein Fall aber bedarf ganz besonderer Aufmerksamkeit. Es kann nämlich vorkommen, dafs die Function sich mehr und mehr einer bestimmten Grenze nähert, wenn die in ihr enthaltene Variabele fortwährend ins Unbestimmte hinaus zunimmt. Diefs ist z. B. der Fall bei der Function $\frac{b}{x}$. Diese nimmt fortwährend ab, wenn x wächst, und zwar kann ihr Werth kleiner als jeder noch so kleine beliebige Bruch β werden, sobald man nur $x > \frac{b}{\beta}$ nimmt; man sagt daher: „bei unendlich wachsenden x convergirt $\frac{b}{x}$ gegen die Null“ oder: „für $x = \infty$ hat $\frac{b}{x}$ die Null zur Grenze.“ Der letztere Ausdruck lässt sich dadurch in Form einer Gleichung darstellen, dafs man die Worte „Grenzwerth von“ irgendwie abkürzt, und es ist üblich, dafür die Sylbe *Lim.* (Abkürzung von *Limes* = Grenze) zu brauchen; der vorige Satz wird daher geschrieben

$$Lim\,\frac{b}{x} = 0, \qquad \text{für } x = \infty$$

Hieraus folgt z. B., dafs der etwas zusammengesetztere Ausdruck $a + \frac{b}{x}$ gegen die Grenze a convergirt, d. h.

$$Lim\left(a + \frac{b}{x}\right) = a, \qquad x = \infty.$$

Überhaupt bedeutet die Gleichung

$$Lim\, f(x) = a, \qquad x = \infty,$$

dafs der Unterschied zwischen der Function $f(x)$ und der Constanten a kleiner als jede angebbare Zahl gemacht werden kann, wenn man x ins Unendliche wachsen läfst. Um den letzteren Zusatz zu ersparen, werden wir nicht selten eine unendlich wachsende Zahl durch einen der Buchstaben σ, τ, ω bezeichnen, mithin statt der vorigen Gleichung kürzer $Lim\, f(\omega) = a$ schreiben.

Setzt man $\frac{1}{\omega} = \delta$, so ist δ eine gegen die Null convergirende Zahl, und an die Stelle von $f(\omega)$ tritt eine Function von δ, welche $F(\delta)$ heifsen möge. Man hat jetzt die neue Gleichung $Lim\, F(\delta) = a$, welche sagt, dafs der Unterschied zwischen $F(\delta)$ und a kleiner als jede angebbare Zahl gemacht werden kann, wenn δ die Null zur Grenze hat*).

Wir geben zunächst ein paar einfache Beispiele von Grenzbestimmungen.

a. Sucht man die Grenze, welcher sich der Bruch

$$\frac{b + \omega}{a + \omega}$$

bei unendlich wachsendem ω nähert, so kann man zwei Wege gehen. Man benutzt entweder die identische Gleichung

$$\frac{b + \omega}{a + \omega} = 1 + \frac{b - a}{a + \omega}$$

und beachtet, dafs der letzte Bruch einen constanten Zähler und einen unendlich wachsenden Nenner besitzt, dafs folglich sein Werth gegen die Null convergirt. Oder man dividirt Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit ω und erhält

$$\frac{b + \omega}{a + \omega} = \frac{b\frac{1}{\omega} + 1}{a\frac{1}{\omega} + 1} = \frac{b\delta + 1}{a\delta + 1},$$

*) Die Lehre von den Grenzwerthen ist behufs einer strengeren Begründung der höheren Analysis von L'Huilier eingeführt worden in dem Werke *Expositio elementaris principiorum calculi differentialis et integralis.* Tubingae, 1795; ihre weitere Ausbildung verdankt sie hauptsächlich Cauchy; s. dessen *Cours d'analyse algébrique.* Paris, 1821.

wo δ die Null zur Grenze hat. Auf beiden Wegen gelangt man zu dem Resultate

1) $$Lim \frac{b + \omega}{a + \omega} = 1,$$

welches sich leicht in Worte fassen läſst.

b. Es sei zweitens die Grenze zu bestimmen, gegen welche die Differenz

$$\sqrt{\omega + \alpha} - \sqrt{\omega}$$

convergirt, wobei die Wurzeln im absoluten Sinne genommen werden mögen. Die gesuchte Gröſse läſst sich hier mittelst der Bemerkung finden, daſs die obige Differenz gleich ist dem Bruche

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\omega + \alpha} + \sqrt{\omega}},$$

der zufolge des constanten Zählers und des unendlich wachsenden Nenners die Null zur Grenze hat; es ist also

2) $$Lim\,(\sqrt{\omega + \alpha} - \sqrt{\omega}) = 0.$$

Für $\omega = x^2 - a^2$, $\alpha = a^2$ folgt hieraus eine bekannte Eigenschaft der Hyperbel.

Auf ganz ähnliche Weise kann man den Grenzwerth von

$$\sqrt{\omega\,(\omega + \alpha)} - \omega$$

ermitteln. Zunächst ist diese Differenz

$$= (\sqrt{\omega + \alpha} - \sqrt{\omega})\,\sqrt{\omega} = \frac{\alpha\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega + \alpha} + \sqrt{\omega}},$$

und wenn rechter Hand Zähler und Nenner durch $\sqrt{\omega}$ dividirt werden, so entsteht die neue Form

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{\omega}} + 1}.$$

Hier bleibt der Zähler constant, während der Nenner gegen die Grenze $\sqrt{1 + 0} + 1 = 2$ convergirt; es ist daher

3) $$Lim\,\left\{\sqrt{\omega\,(\omega + \alpha)} - \omega\right\} = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Auch dieser Gleichung lässt sich für $\omega = x$, $\alpha = 2a$ ein geometrischer Sinn unterlegen, der auf die Hyperbel Bezug hat*).

*) Bevor die Theorie der Grenzwerthe begründet war, pflegte man Gleichungen wie No. 2) folgendermaaſsen abzuleiten: „Die endliche Gröſse α verschwindet gegen das unendlich groſse ω, mithin ist

$$\sqrt{\omega + \alpha} - \sqrt{\omega} = \sqrt{\omega} - \sqrt{\omega} = 0."$$

c. Es möge endlich noch die Frage erörtert werden, welcher Grenze sich a^ω bei unendlich wachsenden ω nähert. Für $a \geqq 2$ ist allerdings leicht genug zu sehen, dass a^ω ins Unendliche zunimmt, dagegen erhellt dies nicht so unmittelbar, wenn a nur wenig mehr als die Einheit ausmacht.

Nun ist durch gewöhnliche Division

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1;$$

unter der Voraussetzung $a > 1$ beträgt jede der Potenzen $a, a^2, \ldots a^{n-1}$ mehr als die Einheit, mithin ist, wenn jede der genannten Potenzen durch die kleinere Einheit ersetzt wird,

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} > n$$

oder durch Multiplication mit $a - 1$ und Transposition

$$a^n > 1 + n\,(a - 1).$$

Bei unendlich wachsenden n kann das Product $n\,(a - 1)$ jede angebbare Zahl übersteigen, und daraus folgt

$$Lim\; a^n = \infty, \qquad a > 1, \qquad n = \infty.$$

Ist der Exponent von a keine ganze, sondern irgend eine andere positive Zahl, so bezeichne n die nächst vorhergehende Zahl; man hat dann $\omega > n$, $a^\omega > a^n$, mithin um so mehr, da schon a^n ins Unendliche wächst,

4) $$Lim\; a^\omega = \infty, \qquad a > 1.$$

Im Falle $a < 1$ kann man $a = \frac{1}{b}$ setzen, wo $b > 1$ ist; in der identischen Gleichung

$$a^\omega = \left(\frac{1}{b}\right)^\omega = \frac{1}{b^\omega}$$

steht dann rechter Hand ein Bruch, dessen Zähler constant bleibt, und dessen Nenner ins Unendliche wächst; hieraus folgt

5) $$Lim\; a^\omega = 0, \qquad a < 1.$$

Der letzte Fall $a = 1$ bedarf keiner besonderen Untersuchung, da 1^x immer $= 1$ ist.

Die Unsicherheit dieser Schlufsweise erhellt sehr deutlich aus Nr. 3), denn in dieser würde bei ganz derselben Vernachlässigung der unrichtige Grenzwerth 0 statt des richtigen $\frac{1}{2}\alpha$ zum Vorschein kommen.

§. 6.

Allgemeine Sätze über Grenzbestimmungen.

Wenn eine Function aus mehreren anderen Functionen zusammengesetzt ist, deren einzelne Grenzwerthe bekannt sind, so entsteht die Frage, wie man den Grenzwerth der zusammengesetzten Function aus den Grenzwerthen ihrer einzelnen Bestandtheile herleiten soll. So besteht z. B. die Function

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \cdot \operatorname{arctan} x$$

aus zwei Factoren, von denen der erste sich der Grenze Eins und der zweite der Grenze $\frac{1}{2}\pi$ nähert, wenn x unendlich wächst, und es bleibt nun noch zu untersuchen, wie sich $\operatorname{Lim} f(x)$ aus 1 und $\frac{1}{2}\pi$ bildet. In solchen Fällen bedient man sich der nachfolgenden Sätze.

I. Nähert sich die Function $\varphi(x)$, gleichviel ob für wachsende oder abnehmende x, der Grenze a, so darf man $\varphi(x) = a + \delta$ setzen, worin δ zwar eine an sich unbekannte Gröfse ist, von der man aber wenigstens weifs, dafs sie verschwindet, wenn man von $\varphi(x)$ zu $\operatorname{Lim} \varphi(x)$ übergeht, weil in diesem Falle die Gleichung $\operatorname{Lim} \varphi(x) = a$, der Voraussetzung nach, entstehen soll. Ist ebenso $\operatorname{Lim} \psi(x) = b$, so darf $\psi(x) = b + \varepsilon$ gesetzt werden, wo nun auch ε beim Übergange zur Grenze verschwindet. Man hat nun

$$\begin{aligned} \varphi(x) \pm \psi(x) &= a + \delta \pm (b + \varepsilon) \\ &= a \pm b + \delta \pm \varepsilon \end{aligned}$$

folglich

$$\operatorname{Lim} [\varphi(x) \pm \psi(x)] = a \pm b$$

oder vermöge der Werthe von a und b

$$1) \qquad \operatorname{Lim} [\varphi(x) \pm \psi(x)] = \operatorname{Lim} \varphi(x) \pm \operatorname{Lim} \psi(x)$$

d. h. der Grenzwerth einer Summe oder Differenz wird dadurch gefunden, dafs man die Grenzwerthe der einzelnen Bestandtheile addirt resp. subtrahirt.

Hat man allgemeiner für m verschiedene Functionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_m(x)$

$$\operatorname{Lim} \varphi_1(x) = a_1, \operatorname{Lim} \varphi_2(x) = a_2, \ldots \operatorname{Lim} \varphi_m(x) = a_m$$

so folgt

$$\varphi_1(x) = a_1 + \delta_1, \varphi_2(x) = a_2 + \delta_2, \ldots \varphi_m(x) = a_m + \delta_m$$

und mithin

$$2) \qquad \begin{aligned} &\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \varphi_3(x) \pm \ldots \pm \varphi_m(x) \\ &= a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_m \\ &+ \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \ldots \pm \delta_m. \end{aligned}$$

Nach dem Begriffe des Grenzwerthes kann jede der Gröfsen δ_1, $\delta_2, \ldots \delta_m$ beliebig klein gemacht, mithin soweit verringert werden, dafs ihr Werth zwischen $-\varrho$ und $+\varrho$ liegt, wo ϱ eine willkürlich gewählte kleine Zahl bedeutet. Die Summe

$$3)\qquad \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \ldots \pm \delta_m$$

ist dann zwischen $-m\varrho$ und $+m\varrho$ enthalten, und da sich unter der Voraussetzung eines unveränderlichen m auch das Product $m\varrho$ durch hinreichend klein gewählte ϱ beliebig weit verringern läfst, so folgt, dafs das in No. 3) verzeichnete Aggregat sich der Grenze Null nähert. Von der Gleichung No. 2) bleibt nun übrig

$$4)\qquad Lim\,[\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \varphi_3(x) \pm \ldots \pm \varphi_m(x)]$$
$$= a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_m$$
$$= Lim\,\varphi_1(x) \pm Lim\,\varphi_2(x) \pm Lim\,\varphi_3(x) \pm \ldots \pm Lim\,\varphi_m(x).$$

Diese Gleichung zeigt, wie man den Grenzwerth einer Function findet, die aus einer endlichen Menge anderer Functionen durch Additionen oder Subtractionen zusammengesetzt ist. Es besteht aber dieses Theorem im Allgemeinen nicht mehr, wenn die Anzahl jener Bestandtheile unendlich grofs ist, denn es könnte dann sehr wohl sein, dafs die Summe $\delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm$ etc., die nun aus einer unendlichen Menge abnehmender Gröfsen besteht, sich einer von Null verschiedenen Gröfse näherte.

II. Die Aufgabe, den Grenzwerth eines Productes zu finden, läfst sich leicht auf die vorige zurückführen. Aus

$$\varphi_1(x)\;\varphi_2(x)\;\varphi_3(x)\ldots\varphi_m(x)$$
$$=(a_1+\delta_1)\;(a_2+\delta_2)\;(a_3+\delta_3)\ldots(a_m+\delta_m)$$

folgt nämlich, indem man beiderseits die Logarithmen nimmt,

$$log\,[\varphi_1(x)\;\varphi_2(x)\;\varphi_3(x)\ldots\varphi_m(x)]$$
$$= log\,(a_1+\delta_1) + log\,(a_2+\delta_2) + log\,(a_3+\delta_3) + \ldots + log\,(a_m+\delta_m)$$

nennen wir die linke Seite $f(x)$, so ist durch Übergang zur Grenze

$$Lim\,f(x) = log\,a_1 + log\,a_2 + log\,a_3 + \ldots + log\,a_m$$
$$= log\,(a_1\,a_2\,a_3\ldots a_m)$$

mithin

$$f(x) = log\,(a_1\,a_2\,a_3\ldots a_m) + \varepsilon$$

wo ε eine Gröfse bezeichnet, welche beim Grenzenübergange verschwindet. Bezeichnen wir mit B die Basis des logarithmischen Systemes, so folgt weiter

$$B^{f(x)} = B^{log\,(a_1\,a_2\,a_3\ldots a_m)+\varepsilon}$$

oder vermöge der Bedeutung von $f(x)$

$$\varphi_1(x)\;\varphi_2(x)\;\varphi_3(x)\ldots\varphi_m(x) = a_1\,a_2\,a_3\ldots a_m\,.\,B^{\varepsilon}$$

Beim Übergange zur Grenze verwandelt sich B^{ε} in $B^0 = 1$ und es wird jetzt

$$5)\quad Lim\ [\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)\ \varphi_3(x)\ \ldots\ \varphi_m(x)] = a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_m$$
$$= Lim\ \varphi_1(x)\ .\ Lim\ \varphi_2(x)\ .\ Lim\ \varphi_3(x)\ .\ .\ Lim\ \varphi_m(x)$$

d. h. der Grenzwerth eines Productes ist das Product aus den Grenzwerthen der einzelnen Factoren. In der Anwendung auf das im Anfange genannte Beispiel ist also

$$Lim\left(\frac{x}{1+x}\ .\ arctan\ x\right) = Lim\ \frac{x}{1+x}\ .\ Lim\ arctan\ x = 1\ .\ \frac{\pi}{2}$$

Doch mufs hier wiederum bemerkt werden, dafs der in No. 5) ausgesprochene Satz nur für eine endliche Anzahl von Factoren Gültigkeit besitzt.

III. Bei der Division ist die Sache ganz ähnlich; aus $Lim\ \varphi(x) = a$, $Lim\ \psi(x) = b$ folgt nämlich

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{b+\varepsilon}{b+\delta} = \frac{b}{a} + \frac{a\varepsilon - b\delta}{a(a+\delta)}$$

und durch Übergang zur Grenze

$$6)\qquad Lim\ \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{b}{a} = \frac{Lim\ \psi(x)}{Lim\ \varphi(x)}$$

was dem Früheren völlig analog ist.

IV. Um den Grenzwerth des zusammengesetzten Ausdrucks

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = (a+\delta)^{b+\varepsilon}$$

zu bestimmen, nehme man beiderseits die Logarithmen der Basis B; dann ist

$$log\ [\varphi(x)^{\psi(x)}] = (b+\varepsilon)\ log\ (a+\delta)$$

Bezeichnen wir die linke Seite für den Augenblick mit $f(x)$, so folgt

$$Lim\ f(x) = b\ log\ a$$

mithin

$$f(x) = b\ log\ a + \zeta$$

wo ζ eine beim Grenzenübergange verschwindende Gröfse ist. Man hat nun weiter

$$B^{f(x)} = B^{b\ log\ a}\ .\ B^{\zeta}$$

oder vermöge der Bedeutung von $f(x)$

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = a^b\ .\ B^{\zeta}$$

und hieraus folgt durch Übergang zur Grenze

$$7)\qquad Lim\ [\varphi(x)^{\psi(x)}] = a^b = [Lim\ \varphi(x)]^{Lim\ \psi(x)}$$

V. Sehr häufig benutzt man zu Grenzbestimmungen folgenden Satz: wenn die Function $f(x)$ zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ liegt, also die Ungleichung

$$\varphi(x) > f(x) > \psi(x)$$

stattfindet, und sich $\varphi(x)$ sowohl als $\psi(x)$ einer und derselben Grenze k nähert, so ist auch $Lim\ f(x) = k$.

Diefs folgt leicht aus der Bemerkung, dafs eine zwischen A und B liegende Zahl M, $(A > M > B)$ jederzeit unter der Form

$$M = B + \varrho\ (A - B)$$

dargestellt werden kann, wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet. Man kann daher auch

$$f(x) = \psi(x) + \varrho\ [\varphi(x) - \psi(x)]$$

setzen, und es folgt nun durch Übergang zur Grenze, wegen $Lim\ \varphi(x) = k$ und $Lim\ \psi(x) = k$,

$$Lim\ f(x) = k$$

wie behauptet wurde. Beispiele hierzu wird man in den nächsten Paragraphen finden.

§. 7.

Grenzbestimmungen an Potenzen.

Die Untersuchung, welche wir über mehrere aus der Potenz entspringende Grenzwerthe anstellen werden, beruht auf einigen sehr einfachen Grundformeln, deren Entwickelung wir vorausschicken.

Bekanntlich gilt für ganze positive m die identische Gleichung

$$\frac{a^m - b^m}{a - b}$$
$$= a^{m-1} + a^{m-2}\, b + a^{m-3}\, b^2 + \ldots + a^2\, b^{m-3} + ab^{m-2} + b^{m-1},$$

in welcher rechter Hand m Summanden vorkommen; ist nun $a > b > 0$, so wird die rechte Seite zu grofs, wenn man statt b überall a setzt, mithin ist

1) $$\frac{a^m - b^m}{a - b} < ma^{m-1},$$

dagegen wird die rechte Seite zu klein, wenn man überall b an die Stelle von a treten läfst, d. h.

2) $$\frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}.$$

Multiplicirt man die Ungleichung 1) mit dem positiven Factor $a - b$ und vereinigt nachher diejenigen Gröfsen, welche den gemeinschaftlichen Factor a^{m-1} enthalten, so erhält man

3) $$[a - m\ (a - b)]\ a^{m-1} < b^m;$$

durch eine ganz ähnliche Rechnung zieht man aus No. 2)

4) $$a^m > [b + m\ (a - b)]\ b^{m-1}.$$

Unter der Voraussetzung, dafs $a - m\ (a - b)$ eine positive Gröfse ist, kann man die Ungleichung 3) mit $a - m\ (a - b)$ dividiren; diefs giebt

$$a^{m-1} < \frac{b^m}{a - m(a - b)}$$

wobei die Bedingung

$$a > m(a - b) \text{ oder } b > \frac{m - 1}{m} a$$

festzuhalten ist. Setzt man $m = n + 1$, so wird

5) $$a^n < \frac{b^{n+1}}{a - (n + 1)(a - b)}, \quad a > b > \frac{n}{n + 1} a.$$

Aus der Ungleichung 4) erhält man, wenn der Symmetrie wegen n für m geschrieben wird,

6) $$a^n > [b + n(a - b)]b^{n-1}, \quad a > b.$$

Diefs ist der Apparat, dessen wir für das Folgende bedürfen.

Die erste Aufgabe sei, den Grenzwerth des Quotienten

$$\frac{(1 + \delta)^\mu - 1}{\delta}$$

für den Fall zu bestimmen, dafs δ gegen die Null convergirt, während μ einen gegebenen constanten Werth behält. Wollte man geradezu $\delta = 0$ setzen, so würde man zu dem Ausdrucke $\frac{0}{0}$ gelangen, der bekanntlich (dem Begriffe der Division gemäfs) jede beliebige Zahl bedeuten kann, und womit man nur erfährt, dafs jener Grenzwerth irgend eine Zahl sein wird. Die Sache bedarf daher einer genaueren Untersuchung.

Es sei zunächst δ positiv und μ eine ganze positive Zahl $= n$. Man kann in diesem Falle die Ungleichungen 5) und 6) für $a = 1 + \delta$, $b = 1$ benutzen, nur mufs

$$1 > \frac{n}{n + 1}(1 + \delta) \quad \text{d. h.} \quad \delta < \frac{1}{n}$$

sein; darin liegt aber keine Beschränkung, weil δ gegen die Null convergiren soll und daher gleich anfangs $< \frac{1}{n}$ genommen werden darf. Man hat jetzt bei Zusammenstellung der genannten Ungleichungen

7) $$\frac{1}{1 - n\delta} > (1 + \delta)^n > 1 + n\delta$$

mithin durch Subtraction der Einheit und Division mit δ

$$\frac{n}{1 - n\delta} > \frac{(1 + \delta)^n - 1}{\delta} > n;$$

hieraus folgt, wenn δ gegen die Null convergirt,

8) $$Lim \frac{(1 + \delta)^n - 1}{\delta} = n.$$

Es sei zweitens μ ein positiver Bruch $= \frac{p}{q}$, wobei p und q ganze positive Zahlen bedeuten. Da δ als positiv vorausgesetzt wird, so beträgt der absolute Werth von

$$(1+\delta)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+\delta)^p}$$

mehr als die Einheit und man kann folglich

$$(1+\delta)^{\frac{p}{q}} = 1 + \varepsilon$$

setzen; die Gröfse ε kennt man nicht genauer, doch weifs man von ihr, dafs sie positiv ist und dafs sie gleichzeitig mit δ gegen die Null convergiren mufs, weil $1^{\frac{p}{q}} = 1$ ist. Aus der vorigen Gleichung erhält man

$$(1+\delta)^p = (1+\varepsilon)^q$$

ferner durch beiderseitige Subtraction der Einheit und durch Division

$$\frac{(1+\delta)^p - 1}{(1+\varepsilon)^q - 1} = 1.$$

Zufolge dieser Gleichungen ist nun

$$\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}} - 1}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{(1+\delta)^p - 1}{(1+\varepsilon)^q - 1}$$

oder auch

$$\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}} - 1}{\delta} = \frac{\dfrac{(1+\delta)^p - 1}{\delta}}{\dfrac{(1+\varepsilon)^q - 1}{\varepsilon}}$$

Bei verschwindenden δ nähert sich der Zähler des rechts stehenden Doppelbruches der Grenze p; da gleichzeitig ε gegen die Null convergirt, so hat der Nenner die Zahl q zur Grenze, mithin ist

$$Lim \frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}} - 1}{\delta} = \frac{p}{q}.$$

Indem man dieses Resultat mit dem unter No. 8) erhaltenen vereinigt, gelangt man zu dem Satze, dafs die Gleichung

$$9) \qquad Lim \frac{(1+\delta)^{\lambda} - 1}{\delta} = \lambda$$

für jedes positive und rationale λ gilt.

Da man sich irrationalen Zahlen durch rationale Brüche (Decimalbrüche) beliebig weit nähern kann, so ist zu erwarten, dafs die Formel 9) auch für irrationale λ richtig bleiben wird. Diefs kann auch apagogisch bewiesen werden. Bezeichnet nämlich $\varkappa$ eine irrationale positive Zahl, so würde, falls die Gleichung

10) $$Lim\,\frac{(1+\delta)^{\varkappa}-1}{\delta}=\varkappa$$

nicht gelten sollte, rechter Hand entweder mehr oder weniger als $\varkappa$ vorhanden sein müssen. Sei nun erstens

$$Lim\,\frac{(1+\delta)^{\varkappa}-1}{\delta}=\varkappa+\alpha$$

und α eine positive Gröfse, so läfst sich zwischen $\varkappa$ und $\varkappa+\alpha$ immer eine rationale Zahl λ einschalten, und dann ist $\varkappa<\lambda$, ferner

$$(1+\delta)^{\varkappa}<(1+\delta)^{\lambda},$$

$$\frac{(1+\delta)^{\varkappa}-1}{\delta}<\frac{(1+\delta)^{\lambda}-1}{\delta}$$

mithin beim Übergange zur Grenze

$$Lim\,\frac{(1+\delta)^{\varkappa}-1}{\delta}<\lambda;$$

diese Folgerung widerspricht aber der Annahme, dafs der fragliche Grenzwerth $=\varkappa+\alpha$ d. h. $>\lambda$ sei. Wäre zweitens

$$Lim\,\frac{(1+\delta)^{\varkappa}-1}{\delta}=\varkappa-\beta$$

und β positiv, so läfst sich zwischen $\varkappa-\beta$ und $\varkappa$ wieder eine rationale Zahl λ einschalten, und es ist $\varkappa>\lambda$, ferner

$$\frac{(1+\delta)^{\varkappa}-1}{\delta}>\frac{(1+\delta)^{\lambda}-1}{\delta}$$

und durch Übergang zur Grenze

$$Lim\,\frac{(1+\delta)^{\varkappa}-1}{\delta}>\lambda;$$

diese Folgerung widerspricht aber der Annahme, dafs der fragliche Grenzwerth $=\varkappa-\beta$ d. h. $<\lambda$ sei. Demnach kann jener Grenzwerth weder mehr noch weniger als $\varkappa$ betragen; die Gleichung 9) gilt also für jedes positive λ.

Ist ferner der Exponent μ eine negative Zahl $=-\lambda$, so hat man

$$\frac{(1+\delta)^{-\lambda}-1}{\delta}=\frac{\dfrac{1}{(1+\delta)^{\lambda}}-1}{\delta}=\frac{1-(1+\delta)^{\lambda}}{\delta\,(1+\delta)^{\lambda}}$$

d. i.

$$\frac{(1+\delta)^{-\lambda}-1}{\delta}=-\frac{(1+\delta)^{\lambda}-1}{\delta}\cdot\frac{1}{(1+\delta)^{\lambda}};$$

wegen des an sich positiven λ convergirt der erste Bruch rechter Hand gegen die Grenze λ, der zweite gegen die Einheit, mithin wird

$$Lim\,\frac{(1+\delta)^{-\lambda}-1}{\delta}=-\lambda.$$

Indem man dieses Resultat mit dem unter No. 9) erhaltenen vereinigt gelangt man zu dem allgemeinen Satze, daſs die Formel

$$11)\qquad Lim\,\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}=\mu$$

für jedes reelle μ gilt mit alleiniger Ausnahme des Falles $\mu=0$.

Wir haben bisher δ immer als positiv vorausgesetzt und wollen nun noch untersuchen, wie sich die Sache bei negativen δ gestaltet. Lassen wir zu diesem Zwecke $-\delta'$ an die Stelle von δ treten, so wird der fragliche Quotient

$$\frac{(1-\delta')^{\mu}-1}{-\delta'}=\frac{1-(1-\delta')^{\mu}}{\delta'},$$

wo δ' an sich positiv ist. Unter der gemachten Voraussetzung hat der Ausdruck

$$\frac{\delta'}{1-\delta'}=\vartheta$$

die Null zur Grenze und man kann daher statt δ' die neue Gröſse ϑ einführen, indem man

$$\delta'=\frac{\vartheta}{1+\vartheta}$$

substituirt; dieſs giebt

$$\frac{(1-\delta')^{\mu}-1}{-\delta'}=\frac{1-\left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)^{\mu}}{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}=\frac{(1+\vartheta)^{\mu}-1}{\vartheta}\cdot\frac{1}{(1+\vartheta)^{\mu-1}}.$$

Rechter Hand nähert sich der erste Bruch der Grenze μ, der zweite der Grenze 1, mithin ist

$$Lim\,\frac{(1-\delta')^{\mu}-1}{-\delta'}=\mu,$$

und daraus geht hervor, daſs die Formel 10) auch für negative δ richtig bleibt.

Eine naheliegende einfache Anwendung dieses Satzes ist folgende. Wenn δ einen sehr kleinen Bruch bezeichnet, so muſs wenigstens näherungsweis die Gleichung

$$\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}=\mu$$

stattfinden; daraus ergiebt sich

$$(1+\delta)^{\mu}=1+\mu\delta$$

und liegt hierin ein Mittel, um aus Zahlen, welche wenig von der

Einheit differiren, näherungsweis Wurzeln beliebiger Grade zu ziehen. So ist nach dieser Formel

$$\sqrt{1{,}0008} = 1{,}0004,$$

was mit dem genaueren Werthe

$$\sqrt{1{,}0008} = 1{,}00039992$$

sehr gut übereinstimmt; bei kleineren δ wird selbstverständlich die Genauigkeit gröfser, z. B.

$$\sqrt[3]{1{,}00009} = 1{,}00003$$

statt

$$\sqrt[3]{1{,}00009} = 1{,}0000299991.$$

Mit einer Modification kann dieses Verfahren auch bei Wurzeln aus grofsen Zahlen angewendet werden, sobald der Radicand nahe an einer Zahl liegt, deren Wurzel schon bekannt ist. So differirt z. B. 7564 nur um 5 von der nächsten Quadratzahl $7569 = 87^2$, daher

$$\sqrt{7564} = \sqrt{7569 - 5} = \sqrt{7569\left(1 - \frac{5}{7569}\right)}$$

$$= 87\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7569}\right) = 86{,}97126437,$$

was mit dem genaueren Werthe

$$\sqrt{7564} = 86{,}97125962$$

auf fünf Decimalstellen übereinstimmt.

§. 8.

Die Exponentialgröfsen und Logarithmen als Grenzwerthe von Potenzen.

I. Benutzt man die im vorigen Paragraphen abgeleitete Ungleichung

$$1)\qquad a^n < \frac{b^{n+1}}{a - (n+1)(a-b)}, \qquad a > b > \frac{n}{n+1}\,a,$$

für den Fall

$$a = 1 + \frac{1}{n}, \qquad b = 1 + \frac{1}{n+1},$$

welcher der angegebenen Bedingung genügt, so erhält man

$$2)\qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Für $n = 1, 2, 3, 4$ etc. giebt diese Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 < \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 < \cdots$$

d. h. mit anderen Worten, die Potenz $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ wächst fortwährend, wenn ω das Gebiet der natürlichen Zahlen durchläuft.

Die Ungleichung 1) liefert weiter für $a=1+\frac{1}{2p}$, $b=1$, $n=p$

$$\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{p}<2$$

und durch Erhebung aufs Quadrat

$$\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{2p}<4.$$

Um so mehr ist nun nach Nr. 2)

$$\left(1+\frac{1}{2p-1}\right)^{2p-1}<\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{2p}<4;$$

es mag also m eine gerade oder eine ungerade Zahl sein, jedenfalls beträgt $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ weniger als 4. Demnach wird der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$, trotz seines fortwährenden Wachsthums, nicht unendlich grofs; er mufs sich folglich einer bestimmten Grenze nähern, die >2 und zugleich ≤ 4 ist. Man bezeichnet diese Zahl mit e, wobei es vorläufig nicht auf ihren genauen Werth, sondern nur darauf ankommt, dafs die genannte Zahl existirt; es ist mithin für ganze positive unendlich werdende ω

$$3)\qquad Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e.$$

Wenn ω keine ganze, aber wenigstens eine positive Zahl ist, so kann man immer zwei auf einander folgende ganze positive Zahlen σ und $\tau=\sigma+1$ angeben, zwischen denen ω liegt; man hat dann

$$1+\frac{1}{\sigma}>1+\frac{1}{\omega}>1+\frac{1}{\tau}$$

mithin auch

$$\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^{\omega}>\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}>\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\omega}.$$

Ferner läfst sich ω unter der doppelten Form $\omega=\sigma+\alpha$ und $\omega=\tau-\beta$ darstellen, wo α und β positive echte Brüche sind, die sich zur Einheit ergänzen und auf deren Werthe es nicht weiter ankommt; die vorige Ungleichnng wird nun zur folgenden

$$\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^{\sigma+\alpha}>\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}>\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau-\beta},$$

oder

$$\left[\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^\sigma\right]^{1+\frac{\alpha}{\sigma}} < \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega > \left[\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^\tau\right]^{1-\frac{\beta}{\tau}}.$$

Zugleich mit ω wachsen auch die einschliefsenden ganzen Zahlen σ und τ ins Unendliche; die Ausdrücke $\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^\sigma$ und $\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^\tau$ convergiren nach No. 3) gegen die gemeinschaftliche Grenze e, und $\frac{\alpha}{\sigma}$ sowie $\frac{\beta}{\tau}$ haben die Null zur gemeinschaftlichen Grenze. Nach allen diesen Bemerkungen folgt, dafs die Gleichung

4) $$Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega\right] = e$$

auch für nicht ganze positive unendlich werdende ω gilt.

Ist ω eine negative Zahl, so kann man $\omega = -(\varrho + 1)$ setzen, wo ϱ eine positive unendlich wachsende (ganze oder nicht ganze) Zahl bedeutet; man hat dann

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega = \left(1-\frac{1}{\varrho+1}\right)^{-(\varrho+1)} = \left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^\varrho \left(1+\frac{1}{\varrho}\right).$$

Der erste Factor rechter Hand nähert sich der Grenze e, der zweite der Grenze 1, mithin folgt wieder

5) $$Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega\right] = e.$$

Die bisherigen Resultate zusammengenommen führen zu dem allgemeinen Satze, dafs die vorstehende Gleichung für jedes irgendwie unendlich werdende reelle ω gültig bleibt. Nicht selten stellt man die Formel 5) in einer anderen Gestalt dar, welche durch die Substitution $\frac{1}{\omega} = \delta$ entsteht: man erhält nämlich

6) $$Lim\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right] = e,$$

und hierin bedeutet δ eine irgendwie gegen die Null convergirende Zahl.

Behufs der numerischen Berechnung von e ist es gut, immer je zwei Zahlen angeben zu können, zwischen denen e enthalten sein mufs. Aus der im vorigen Paragraphen bewiesenen Ungleichung

$$\frac{1}{1-n\delta} > (1+\delta)^n > 1 + n\delta$$

folgt nun, wenn $\delta = \frac{1}{kn}$ gesetzt und Alles auf die k^{te} Potenz erhoben wird,

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)^k > \left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

und bei unendlich wachsenden n

7) $$\left(\frac{k}{k-1}\right)^k > e > \left(\frac{k+1}{k}\right)^k.$$

Dabei ist k eine willkürliche positive Zahl, die freilich sehr grofs genommen werden mufs, wenn man einige Genauigkeit verlangt. So ergiebt sich z. B. für $k = 1000$ mittelst der logarithmischen Tafeln, dafs e zwischen

$$\left(\frac{1000}{999}\right)^{1000} = 2,7196 \text{ und } \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} = 2,7170$$

liegt, mithin ungefähr $= 2,718$ ist. Ein viel bequemeres Mittel, um e mit grofser Genauigkeit zu berechnen, werden wir später zeigen.

Es läfst sich nun auch der Grenzwerth des allgemeineren Ausdruckes

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^\omega = \left(1+\frac{1}{\frac{\omega}{z}}\right)^\omega$$

auffinden, worin z eine beliebige reelle Zahl von endlicher Gröfse bezeichnet. Der Bruch $\frac{\omega}{z}$ wächst nämlich gleichzeitig mit ω ins Unendliche, und daher ist, wenn $\frac{\omega}{z} = \omega'$ gesetzt wird,

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^\omega = \left(1+\frac{1}{\omega'}\right)^{\omega' z} = \left[\left(1+\frac{1}{\omega'}\right)^{\omega'}\right]^z;$$

hieraus folgt durch Übergang zur Grenze für unendlich werdende ω und ω'

8)*) $$Lim\left[\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^\omega\right] = e^z.$$

---

*) Es läfst sich dieser Formel eine sehr anschauliche Seite abgewinnen, wenn man die Lehre von den zusammengesetzten Interessen damit verknüpft. Bezeichnet nämlich z die Zinsen des Capitals 1 auf ein Jahr, so ist bei einfachen Interessen das Capital K in einem Jahre auf $K(1+z)$ angewachsen. Werden dagegen die Interessen in Terminen von $\frac{1}{m}$ Jahr zum Capital geschlagen und mitverzinst, so ist der Werth des Capitals K am Ende des ersten m-tel Jahres $= K\left(1+\frac{z}{m}\right)$, am Ende des zweiten m-tels $= K\left(1+\frac{z}{m}\right)^2$, am Ende des dritten m-tels $= K\left(1+\frac{z}{m}\right)^3$ u. s. f., am Ende des ganzen aus m gleichen Theilen bestehenden Jahres also

$$= K\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$$

Beachtet man, dafs linker Hand eine Potenz, rechter Hand eine Exponentialgröfse vorkommt, so liegt hierin ein bemerkenswerther Satz, dessen wörtliche Fassung keine Schwierigkeit bietet.

Um dieses Resultat zu verallgemeinern, denken wir uns die Zahl e als Basis eines logarithmischen Systemes; diese Logarithmen heifsen natürliche und werden entweder durch ${}^{e}log$, oder *log nat* oder am kürzesten durch ein blofses l bezeichnet, wonach immer $e^{lZ} = Z$ ist. Demgemäfs hat man

$$e^{la} = a\,, \qquad e^{x\,la} = a^x;$$

setzt man daher in der Formel 8) $z = x\,la$, so ergiebt sich

$$9) \qquad Lim\left[\left(1 + \frac{x\,la}{\omega}\right)^{\omega}\right] = a^x.$$

In Worten heifst diefs: jede Exponentialgröfse kann als Grenzwerth einer gewissen Potenz angesehen werden.

II. Bezeichnet ϑ irgend eine gegen die Null convergirende Zahl, so hat a^{ϑ} die Einheit, $a^{\vartheta} - 1$ die Null zur Grenze und man kann daher

$$a^{\vartheta} - 1 = \delta$$

setzen, wo δ gleichzeitig mit ϑ verschwindet. Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$\vartheta = {}^{a}log\,(1 + \delta)$$

mithin ist

$$\frac{a^{\vartheta} - 1}{\vartheta} = \frac{\delta}{{}^{a}log\,(1+\delta)} = \frac{1}{\frac{{}^{a}log\,(1+\delta)}{\delta}} = \frac{1}{{}^{a}log\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]}.$$

Durch Übergang zur Grenze für gleichzeitig gegen die Null convergirende ϑ und δ gelangt man zu der Formel

$$10) \qquad Lim\,\frac{a^{\vartheta} - 1}{\vartheta} = \frac{1}{{}^{a}log\;e}.$$

Läfst man nun m beständig wachsen, so werden der einzelnen Termine immer mehr und die Zeiten zwischen ihnen immer kleiner, und geht man zur Grenze für unendlich wachsende m über, so giebt jetzt

$$Lim\left\{K\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m\right\} = Ke^z$$

denjenigen Werth des Capitales an, welcher entsteht, wenn stetig nacheinander die in jedem Augenblicke gewonnenen Interessen sogleich zum Capitale geschlagen und mit verzinst werden. Man kann daher sagen: eine Gröfse, welche in einer gewissen Zeit bei einfachem Wachsthum von K bis $K\,(1 + z)$ zunimmt, wächst in derselben Zeit auf Ke^z an, wenn das Wachsthum so geschieht, dafs in stetiger Folge jeder bereits erzeugte Theil gleichmäfsig wieder neue Theile erzeugen hilft. Das Erste entspräche ungefähr einer unorganischen Anhäufung, das Zweite einem organischen Processe.

Eine bessere Gestalt erhält dieselbe durch folgende Bemerkung. Aus der Gleichung

$$e^{la} = a$$

ergiebt sich, wenn beiderseits die Logarithmen des Systemes mit der Basis a genommen werden,

$$la \,.\, {}^a\!log\, e = {}^a\!log\, a = 1$$

mithin

$${}^a\!log\, e = \frac{1}{la} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{{}^a\!log\, e} = la,$$

mithin ist durch Substitution in No. 10)

11) $$Lim\, \frac{a^\vartheta - 1}{\vartheta} = la.$$

Auch dieses Resultat läfst sich verallgemeinern. Man hat nämlich die identische Gleichung

$$\frac{z^\vartheta - 1}{a^\vartheta - 1} = \frac{\dfrac{z^\vartheta - 1}{\vartheta}}{\dfrac{a^\vartheta - 1}{\vartheta}};$$

in dem Doppelbruche rechter Hand nähert sich der Nenner der Grenze la, der Zähler der Grenze lz, folglich wird

12) $$Lim\, \frac{z^\vartheta - 1}{a^\vartheta - 1} = \frac{lz}{la}.$$

Nimmt man ferner von beiden Seiten der identischen Gleichung

$$e^{lz} = a^{{}^a\!log\, z}$$

die natürlichen Logarithmen, so erhält man

13) $$lz = {}^a\!log\, z \,.\, la \quad \text{oder} \quad \frac{lz}{la} = {}^a\!log\, z,$$

und durch Substitution hiervon in No. 12)

14) $$Lim\, \frac{z^\vartheta - 1}{a^\vartheta - 1} = {}^a\!log\, z,$$

d. h. Jeder Logarithmus läfst sich durch einen gewissen Grenzenübergang aus der Potenz herleiten.

In den gegebenen Formeln liegen die Mittel zur Berechnung der Logarithmen beliebiger Systeme. Statt der Gleichung

$$Lim\, \frac{z^\delta - 1}{\delta} = lz$$

kann man nämlich auch die folgende benutzen, worin $\frac{1}{\delta} = \omega$ gesetzt worden ist

15) $$Lim\left[\omega\left(z^{\frac{1}{\omega}}-1\right)\right]=lz,$$
und wenn man hier für ω eine möglichst grofse ganze Zahl n nimmt, so mufs näherungsweis

16) $$lz = n\left(\sqrt[n]{z}-1\right)$$
sein. Um die verlangte Wurzelziehung direct ausführen zu können, wählt man für n eine Potenz der 2 etwa $n=2^p$; man erhält dann $\sqrt[n]{z}$, indem man p-mal nacheinander die Quadratwurzel auszieht. So findet sich z. B. für $z=7$, $p=11$, $n=2048$, also durch 11malige Quadratwurzelziehung, dafs die 2048ste Wurzel aus 7 gleich 1,00095 ist; vermindert man diese Zahl um 1 und multiplicirt den Rest mit 2048, so erhält man näherungsweise $l\,7=1{,}9456$, während der genauere Werth von $l\,7=1{,}94591$ ist. Nachdem man auf diese Weise eine Tafel der natürlichen Logarithmen berechnet hat, benutzt man die Gleichung 13), um hieraus die Logarithmen jedes anderen Systemes herzuleiten; es ist nämlich

17) $${}^{a}log\; z=\frac{1}{la}\,.\,lz.$$

Der constante Factor $\frac{1}{la}$, womit die natürlichen Logarithmen multiplicirt werden müssen, um sie in künstliche zu verwandeln, heifst der Modulus für die Basis a und wird nicht selten durch M_a bezeichnet. Für das gewöhnliche Logarithmensystem ist $a=10$; nach Formel 16) findet man $l\,10=2{,}3026$, mithin ist der reciproke Werth hiervon $M_{10}=0{,}43429$. Multiplicirt man damit den vorhin gefundenen Werth von $l\,7$, so erhält man $log\;7=0{,}84509$ übereinstimmend mit den Tafeln*).

III. Der vorige Gedankengang läfst sich auch umkehren d. h. man kann die Gleichung 11) direct beweisen und daraus die Formel 5) herleiten. Bei der Wichtigkeit, welche die erhaltenen Resultate für die algebraische Analysis besitzen, ist es vielleicht nicht überflüssig, dieses Verfahren näher zu erörtern.

Aus der bekannten, für $a>b$ geltenden Ungleichung
$$(n+1)\,a^n>\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}>(n+1)\,b^n$$

*) Das obige Verfahren ist trotz seiner Mühseligkeit von den Erfindern der Logarithmen praktisch angewendet worden. S. Neper (Lord John Napier), *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Edinburg 1614; Briggs, *Arithmetica logarithmica*, 1624. Vergl. Klügel's Mathem. Wörterb. Bd. III, S. 548—550.

3*

erhält man mittelst der Substitutionen

$$a = \frac{n+z}{n+1}, \qquad b = 1,$$

wobei die Bedingung $a > b$ durch $z > 1$ ersetzt wird,

$$\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^{n+1} - 1 > z - 1$$

oder nach Weglassung der Einheiten und Ausziehung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Wurzel

$$\text{18)} \qquad \frac{n+z}{n+1} > z^{\frac{1}{n+1}}, \qquad z > 1.$$

Nimmt man zweitens

$$a = 1, \qquad b = \frac{n+z}{n+1},$$

indem man $z < 1$ voraussetzt, um $b < a$ zu erhalten, so findet man

$$1 - z > 1 - \left(\frac{n+z}{n+1}\right)^{n+1}$$

oder

$$\text{19)} \qquad \frac{n+z}{n+1} > z^{\frac{1}{n+1}}, \qquad z < 1.$$

Die Ungleichungen 18) und 19) zusammen beweisen, dafs die Relation

$$\text{20)} \qquad \frac{n+z}{n+1} > z^{\frac{1}{n+1}}$$

für jedes positive, von der Einheit verschiedene z besteht. Mittelst der Substitution

$$z = \frac{y}{x^{\frac{1}{n}}}$$

folgt daraus die neue Gleichung

$$\text{21)} \qquad nx^{\frac{1}{n}} + y > (n+1)\,(xy)^{\frac{1}{n+1}}$$

welche für alle positiven x und y gilt, und nur in dem Falle $x = y^n$ zu einer Gleichung wird.

Für $x = a > 0$ und $y = 1$ ergiebt sich aus No. 21), vorausgesetzt, dafs a nicht $= 1$ ist,

$$n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) > (n+1)\left(a^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)$$

mithin, wenn der Reihe nach $n = 1, 2, 3 \ldots$ gesetzt wird,

$$a - 1 > 2\left(\sqrt{a} - 1\right) > 3\left(\sqrt[3]{a} - 1\right) > 4\left(\sqrt[4]{a} - 1\right) > \ldots;$$

der Ausdruck $n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ nimmt also bei unendlich wachsenden n fortwährend ab. Aus Nr. 21) folgt weiter für $x = a$, $y = \frac{1}{a}$

$$n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) > 1-\frac{1}{a};$$

jene Abnahme geht also nur bis zu einer, die Zahl $1-\frac{1}{a}$ übersteigenden Grenze, die wir mit A bezeichnen wollen:

22) $$Lim\left[n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right] = A.$$

Nehmen wir $a > 1$, so beträgt A weniger als $a-1$ und mehr als $1-\frac{1}{a}$, ist also jedenfalls positiv; im Falle $a < 1$ setzen wir $a=\frac{1}{b}$, wo $b > 1$, und haben

$$Lim\left[n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right] = Lim\left[-\frac{n\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)}{b^{\frac{1}{n}}}\right] = -B,$$

und zwar liegt B zwischen $b-1=\frac{1}{a}-1$ und $1-\frac{1}{b}=1-a$. Wir haben daher zusammen

23) $$\begin{cases} 1-\frac{1}{a} < A < a-1, & \text{für } a > 1, \\ -\left(\frac{1}{a}-1\right) < A < -(1-a), & \text{für } a < 1, \end{cases}$$

und es ist folglich A eine bestimmte, von Null differirende Zahl, wofern nicht $a=1$ ist.

Bezeichnet ferner τ eine nicht ganze positive Zahl, so giebt es immer zwei benachbarte ganze positive Zahlen m und $n=m+1$, zwischen denen τ enthalten ist, und es darf ebensowohl $\tau=m+\mu$ als $\tau=n-\nu$ gesetzt werden, wo μ und ν positive echte Brüche sind, die sich zur Einheit ergänzen. Der Ausdruck $\tau\left(a^{\frac{1}{\tau}}-1\right)$ liegt nun zwischen

$$\tau\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right) = \left(1+\frac{\mu}{m}\right) . \, m\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right)$$

und

$$\tau\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = \left(1-\frac{\nu}{n}\right) . \, n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right);$$

die rechter Hand stehenden Gröfsen nähern sich bei unendlich wachsendem m, τ und n der gemeinschaftlichen Grenze A, daher gilt die Gleichung

24) $$Lim\left[\tau\left(a^{\frac{1}{\tau}}-1\right)\right] = A$$

allgemein für jedes irgendwie ins Unendliche wachsende positive τ. Für $\tau = \frac{1}{\vartheta}$ wird

25) $$Lim \frac{a^{\vartheta} - 1}{\vartheta} = A,$$

und hier bedeutet ϑ eine gegen die Null convergirende Gröfse.

Um A näher zu bestimmen, betrachten wir den Ausdruck

$$^{a}log \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right] = \omega \;.\; ^{a}log \left(1 + \frac{1}{\omega}\right),$$

worin ω eine unendlich wachsende Zahl sein möge. Da $log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)$ die Null zur Grenze hat, so setzen wir

$$^{a}log \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) = \vartheta, \quad \text{mithin } \omega = \frac{1}{a^{\vartheta} - 1}$$

und erhalten

$$Lim \left\{^{a}log \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]\right\} = Lim \frac{1}{a^{\vartheta} - 1} = \frac{1}{A} = {}^{a}log \left(a^{\frac{1}{A}}\right)$$

und durch Rückgang zu den Zahlen

26) $$Lim \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right] = a^{\frac{1}{A}}.$$

Diese Gleichung beweist, dafs sich die Potenz $\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ einer bestimmten endlichen Grenze nähert; letztere kann aber nur eine absolute Zahl sein, weil linker Hand aufser ω keine andere Gröfse vorkommt. Nennen wir e die erwähnte Zahl, setzen also

27) $$Lim \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right] = e,$$

so erhalten wir durch Vergleichung der rechten Seiten von No. 26) und 27)

28) $$e = a^{\frac{1}{A}}.$$

Hiervon läfst sich ein doppelter Gebrauch machen. Einerseits ist nach No. 23, wenn $a > 1$ genommen wird,

$$\frac{a}{a - 1} > \frac{1}{A} > \frac{1}{a - 1}$$

mithin

$$a^{\frac{a}{a-1}} > e > a^{\frac{a}{a-1}}$$

oder für $a = 1 + \frac{1}{\alpha}$

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha+1} > e > \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha},$$

wonach e mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden könnte. Andererseits dient die Gleichung 28) zur Bestimmung von A; es ist nämlich

$$\frac{1}{A} = {}^{a}log\, e \text{ folglich } A = \frac{1}{{}^{a}log\, e} = {}^{e}log\, a,$$

und damit kommt man auf die früheren Resultate zurück.

Noch verdient bemerkt zu werden, dafs man aus den Formeln 11) und 6) auch die im vorigen Paragraphen bewiesene Gleichung 10) herleiten kann. Schreibt man nämlich zur Abkürzung log statt ${}^{a}log$, so ist identisch

$$\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta} = \mu\, \frac{a^{\mu\, log\,(1+\delta)}-1}{\mu\, log\,(1+\delta)} \cdot \frac{log\,(1+\delta)}{\delta}$$

oder, wenn $\mu\, log\,(1+\delta) = \vartheta$ gesetzt wird,

$$\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta} = \mu\, \frac{a^{\vartheta}-1}{\vartheta} \cdot log\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right];$$

durch Übergang zur Grenze für gleichzeitig gegen die Null convergirende δ und ϑ folgt hieraus

$$Lim\, \frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta} = \mu\,.\,la\,.\,\frac{1}{la} = \mu,$$

was mit dem früher auf anderem Wege gefundenen Resultate übereinstimmt.

§. 9.

Folgerungen aus dem Vorigen.

Die in den §§. 7 und 8 entwickelten Formeln bilden nicht nur die Basis für alle späteren Untersuchungen über Potenzen, Exponentialgröfsen und Logarithmen, sondern werden auch bei vielen anderen Gelegenheiten wieder gebraucht. Aus diesem Grunde verfolgen wir die Sache etwas weiter und entwickeln noch einige Grenzwerthe, welche mit den vorigen in nahem Zusammenhange stehen.

Die erste derartige Betrachtung betrifft die Function

1) $$f(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^{\mu}\right] \omega,$$

worin, wie gewöhnlich, ω eine unendlich wachsende Zahl bezeichnen möge. Setzt man $\frac{1}{\omega} = \delta$, so wird

$$f(\omega) = \left[1 - \frac{1}{(1+\delta)^{\mu}}\right]\frac{1}{\delta} = \frac{1}{(1+\delta)^{\mu}} \cdot \frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}$$

und hieraus folgt durch Übergang zur Grenze für unendlich abnehmende δ

2) $$Lim\, f(\omega) = \mu.$$

Wir untersuchen zweitens den Ausdruck

3) $$f_1(\omega) = \left[1 - \left(\frac{log\ \omega}{log\ (\omega + 1)}\right)^\mu\right] \omega \cdot log\ \omega.$$

Hier ist identisch

$$\frac{log\ (\omega + 1)}{log\ \omega} = 1 + \frac{log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)}{log\ \omega},$$

und da der Quotient rechter Hand gegen die Null convergirt, so setzen wir

$$\frac{log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)}{log\ \omega} = \varepsilon \quad \text{also} \quad \frac{log\ (\omega + 1)}{log\ \omega} = 1 + \varepsilon,$$

und erhalten zunächst

$$f_1(\omega) = \left[1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^\mu}\right] \omega\ log\ \omega = \frac{1}{(1+\varepsilon)^\mu} \cdot \frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\varepsilon} \cdot \omega\ \varepsilon\ log\ \omega.$$

Zufolge des Werthes von ε ist $\varepsilon\ log\ \omega = log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)$ daher

$$f_1(\omega) = \frac{1}{(1+\varepsilon)^\mu} \cdot \frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\varepsilon} \cdot log\left\{\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega\right\},$$

und hieraus ergiebt sich, wenn ω ins Unendliche wächst, mithin ε gegen die Null convergirt,

4) $$Lim\, f_1(\omega) = \mu\ log\ e.$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir $log\ (log\ \omega)$ mit $log_2 \omega$ und setzen

5) $$f_2(\omega) = \left[1 - \left(\frac{log_2 \omega}{log_2 (\omega + 1)}\right)^\mu\right] \omega\ log\ \omega\ log_2 \omega.$$

Unter Beibehaltung der vorigen Zeichen haben wir

$$log_2 (\omega + 1) = log\ [log\ (\omega + 1)] = log\ [(1 + \varepsilon)\ log\ \omega]$$
$$= log_2 \omega + log\ (1 + \varepsilon)$$

mithin

$$\frac{log_2 (\omega + 1)}{log_2 \omega} = 1 + \frac{log\ (1 + \varepsilon)}{log_2 \omega};$$

der Bruch rechter Hand convergirt gegen die Null, daher sei

$$\frac{log\ (1 + \varepsilon)}{log_2 \omega} = \vartheta \quad \text{also} \quad \frac{log_2 (\omega + 1)}{log_2 \omega} = 1 + \vartheta;$$

wir erhalten dann

$$f_2(\omega) = \left[1 - \frac{1}{(1+\vartheta)^\mu}\right] \omega \; log \; \omega \; log_2 \omega$$

$$= \frac{1}{(1+\vartheta)^\mu} \cdot \frac{(1+\vartheta)^\mu - 1}{\vartheta} \cdot \omega \; log \; \omega \; . \; \vartheta \; log_2 \omega.$$

Zufolge des Werthes von ϑ ist weiter

$$\vartheta \; log_2 \omega = log \; (1+\varepsilon) = \varepsilon \; log \left[1(+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]$$

mithin

$$f_2(\omega) = \frac{1}{(1+\vartheta)^\mu} \cdot \frac{(1+\vartheta)^\mu - 1}{\vartheta} \; . \; \omega \; \varepsilon \; log \; \omega \; log \left[(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right],$$

oder endlich, weil $\varepsilon \; log \; \omega = log \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)$ war,

$$f_2(\omega) = \frac{1}{(1+\vartheta)^\mu} \cdot \frac{(1+\vartheta)^\mu - 1}{\vartheta} \; . \; log \left\{\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega\right\} \; log \left[(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right].$$

Bei unendlich wachsenden ω convergiren ϑ und ε gegen die Null, daher wird

6) $$Lim \; f_2(\omega) = \mu \; (log \; e)^2.$$

Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet die Function

7) $$f_3(\omega) = \left[1 - \left(\frac{log_3 \omega}{log_3(\omega+1)}\right)^\mu\right] \omega \; log \; \omega \; log_2 \omega \; log_3 \omega,$$

worin $log_3 \omega$ zur Abkürzung für $log \; [log \; (log \, \omega)]$ geschrieben ist. Man hat zunächst

$$log_3(\omega+1) = log \; [log_2(\omega+1)] = log \; [(1+\vartheta) \; log_2 \omega]$$

$$= log_3 \omega + log \; (1+\vartheta),$$

$$\frac{log_3(\omega+1)}{log_3 \omega} = 1 + \frac{log \; (1+\vartheta)}{log_3 \omega} = 1 + \zeta,$$

wobei

$$\frac{log \; (1+\vartheta)}{log_3 \omega} = \zeta$$

gesetzt wurde; hiernach ist

$$f_3(\omega) = \left[1 - \frac{1}{(1+\zeta)^\mu}\right] \omega \; log \; \omega \; log_2 \omega \; log_3 \omega$$

$$= \frac{1}{(1+\zeta)^\mu} \cdot \frac{(1+\zeta)^\mu - 1}{\zeta} \; . \; \omega \; log \; \omega \; log_2 \omega \; . \; \zeta \; log_3 \omega$$

Zufolge des Werthes von ζ kann $\zeta \; log_3 \omega$ durch $log \; (1+\vartheta)$ ersetzt werden und man erhält

$$f_3(\omega) = \frac{1}{(1+\zeta)^\mu} \cdot \frac{(1+\zeta)^\mu - 1}{\zeta} \; \omega \; log \; \omega \; . \; \vartheta \; log_2 \omega \; log \left[(1+\vartheta)^{\frac{1}{\vartheta}}\right],$$

worin sich das Product $\omega\ log_2\omega\ .\ \vartheta\ log_2\omega$ ganz wie früher umgestalten lässt; das Endresultat lautet

8) $$Lim\ f_3(\omega) = \mu\ (log\ e)^3.$$

Den Fortgang dieser Schlufsweisen übersieht man leicht. Setzt man überhaupt für ein ganzes positives p

9) $$f_p(\omega) = \left[1 - \left(\frac{log_p\omega}{log_p(\omega+1)}\right)^\mu\right] \omega\ log\ \omega\ log_2\omega \ldots log_p\omega,$$

so gelangt man zu der allgemeinen Formel

10) $$Lim\ f_p(\omega) = \mu\ (log\ e)^p.$$

Am einfachsten wird dieselbe bei natürlichen Logarithmen, weil dann $log\ e = 1$ ist.

§. 10.

Grenzwerthe bei goniometrischen und cyclometrischen Functionen.

I. Der Sinus eines im ersten Quadranten liegenden Bogens ϑ ist kleiner als der Bogen, letzterer wieder kleiner als die Tangente, daher

$$sin\ \vartheta < \vartheta < tan\ \vartheta$$

und umgekehrt

$$\frac{1}{sin\ \vartheta} > \frac{1}{\vartheta} > \frac{cos\ \vartheta}{sin\ \vartheta}.$$

Multiplicirt man durchgängig mit $sin\ \vartheta$, so folgt

1) $$1 > \frac{sin\ \vartheta}{\vartheta} > cos\ \vartheta,$$

und hiervon läfst sich Gebrauch machen, um den Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{sin\ \vartheta}{\vartheta}$ für den Fall zu bestimmen, dafs ϑ gegen die Null convergirt. Man erhält, weil $cos\ \vartheta$ die Einheit zur Grenze hat,

2) $$Lim\ \frac{sin\ \vartheta}{\vartheta} = 1.$$

Dieses Resultat läfst sich noch verallgemeinern. Es ist nämlich identisch

$$\frac{sin\ \alpha\vartheta}{\vartheta} = \alpha\ .\ \frac{sin\ \alpha\vartheta}{\alpha\vartheta},$$

und wenn hier ϑ gegen die Null convergirt, während α constant bleibt, so hat $\alpha\vartheta$ gleichfalls die Null zur Grenze und kann daher mit ϑ' bezeichnet werden. Unter Anwendung der Formel 2) ergiebt sich nun

3) $$Lim\ \frac{sin\ \alpha\vartheta}{\vartheta} = \alpha,$$

oder wenn der reciproke Werth von ϑ mit ω bezeichnet wird,

4) $$Lim\left(\omega\ sin\ \frac{\alpha}{\omega}\right)=\alpha,$$

wobei ω ins Unendliche wächst.

Mit Hülfe der bekannten Formel $1 - cos\ u = 2\ sin^2 \frac{1}{2}u$ überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender Gleichung

$$\frac{1 - cos\ \beta\vartheta}{\vartheta^2}=2\left(\frac{sin\ \frac{1}{2}\beta\vartheta}{\vartheta}\right)^2;$$

daraus folgt unter Anwendung der Formel 3) für $\alpha=\frac{1}{2}\beta$

5) $$Lim\ \frac{1 - cos\ \beta\vartheta}{\vartheta^2}=\frac{1}{2}\beta^2,$$

oder auch

6) $$Lim\left[\omega^2\left(1 - cos\ \frac{\beta}{\omega}\right)\right]=\frac{1}{2}\beta^2.$$

Man hat ferner die identische Gleichung

$$\frac{tan\ \alpha\vartheta}{\vartheta}=\frac{sin\ \alpha\vartheta}{\vartheta}\cdot\frac{1}{cos\ \alpha\vartheta};$$

bei Anwendung der Formel 3) giebt dieselbe

7) $$Lim\ \frac{tan\ \alpha\vartheta}{\vartheta}=\alpha$$

oder

8) $$Lim\left(\omega\ tan\ \frac{\alpha}{\omega}\right)=\alpha.$$

Als Beispiel für die Bestimmung eines zusammengesetzteren Grenzwerthes betrachten wir noch den Ausdruck

$$\left(cos\ \frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}.$$

Dieser läfst sich zunächst auf folgende Form bringen

$$\left(1 - sin^2\ \frac{\alpha}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}\omega};$$

hier ist $sin^2\ \frac{\alpha}{\omega}$ eine gegen die Null convergirende Zahl, ihr reciproker Werth wächst daher ins Unendliche und mag mit τ bezeichnet werden, so dafs der vorige Ausdruck übergeht in

$$\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}\omega}=\left[\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\frac{\omega}{2\tau}},$$

d. i., vermöge des Werthes von τ,

$$\left[\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\frac{1}{2}\left(\omega\ sin\ \frac{\alpha}{\omega}\right)\ sin\ \frac{\alpha}{\omega}}.$$

Bei gleichzeitig unendlich wachsenden τ und ω wird

$$Lim\left[\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]=e^{-1},\qquad Lim\left(\omega\ sin\ \frac{\alpha}{\omega}\right)=\alpha,$$

$$Lim\ sin\ \frac{\alpha}{\omega}=0,$$

der gesuchte Grenzwerth ist also

9) $$Lim\left[\left(cos\ \frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right]=1.$$

Will man sich auf ganze positive $\omega=m$ beschränken, so kann man diesen Satz auch folgendermaſsen herleiten. Es ist zunächst

$$1>cos\ \frac{\alpha}{m}=\sqrt{1-\left(sin\ \frac{\alpha}{m}\right)^2}>\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2},$$

mithin

$$1>\left(cos\ \frac{\alpha}{m}\right)^m>\left(\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{m^2}}\right)^m.$$

Rechter Hand läſst sich die in §. 7 unter No 3) bewiesene Ungleichung

$$b^m>[a-m\ (a-b)]\ a^{m-1}\quad (b<a)$$

anwenden, indem man

$$b=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{m^2}}=\frac{\sqrt{m^2-\alpha^2}}{m},\qquad a=1$$

setzt; man erhält dann

$$1>\left(cos\ \frac{\alpha}{m}\right)^m>1-(m-\sqrt{m^2-\alpha^2})$$

oder besser

$$1>\left(cos\ \frac{\alpha}{m}\right)^m>1-\frac{\alpha^2}{m+\sqrt{m^2-\alpha^2}},$$

und daraus folgt augenblicklich

10) $$Lim\left[\left(cos\ \frac{\alpha}{m}\right)^m\right]=1,\qquad (m=\infty)$$

Nach demselben Verfahren, mittelst dessen die Formel 9) entwickelt wurde, ergiebt sich auch bei derselben Bezeichnung

$$\left(cos\ \frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega^2}=\left[\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\frac{1}{2}\left(\omega\ sin\ \frac{\alpha}{\omega}\right)^2}$$

mithin durch Übergang zur Grenze

11) $$Lim\left[\left(cos\ \frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega^2}\right]=e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

II. Setzt man $sin\ \vartheta=\delta$, so folgt umgekehrt, weil ϑ ein im ersten Quadranten liegender Bogen war, $\vartheta=arcsin\ \delta$, mithin

$$\frac{arcsin\ \delta}{\delta}=\frac{\vartheta}{sin\ \vartheta}=\frac{1}{\frac{sin\ \vartheta}{\vartheta}};$$

die Gröfse ϑ und δ convergiren gleichzeitig gegen die Null und daher ist

12) $$Lim\,\frac{arcsin\ \delta}{\delta} = 1.$$

In ähnlicher Weise folgt aus der Gleichung $tan\ \vartheta = \delta$ umgekehrt $\vartheta = arctan\ \delta$ und

$$\frac{arctan\ \delta}{\delta} = \frac{\vartheta}{tan\ \vartheta} = \frac{1}{\frac{tan\ \vartheta}{\vartheta}};$$

beim Übergange zur Grenze für gleichzeitig gegen die Null convergirende ϑ und δ ergiebt sich

13) $$Lim\,\frac{arctan\ \delta}{\delta} = 1.$$

Als Beispiel für einen zusammengesetzten Fall diene die Bestimmung des Grenzwerthes, welchem sich der Ausdruck

$$\frac{arccos\ (1-\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$$

bei unendlich abnehmenden ε nähert. Benutzt man zuerst die Formel

$$arccos\ z = arcsin\ \sqrt{1-z^2}$$

so erhält man

$$\frac{arccos\ (1-\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{arcsin\ \sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$= \sqrt{2-\varepsilon}\,\frac{arcsin\ \sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}} = \sqrt{2-\varepsilon}\,\frac{arcsin\ \delta}{\delta},$$

wobei $\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2} = \delta$ gesetzt worden ist. Die Gröfsen ε und δ convergiren gleichzeitig gegen die Null und daher ist

14) $$Lim\,\frac{arccos\ (1-\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{2}$$

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man durch Einführung von goniometrischen Functionen; man würde nämlich $arccos\ (1-\varepsilon) = \vartheta$ mithin $1-\varepsilon = cos\ \vartheta$, $\varepsilon = 1 - cos\ \vartheta = 2\ sin^2 \frac{1}{2}\vartheta$ substituiren und dabei zu beachten haben, dafs ε und ϑ gleichzeitig gegen die Null convergiren*).

§. 11.

Grenzwerthe der Functionen zweier Variabelen.

Wenn der Grenzwerth einer Function $f(x, y)$ für den Fall bestimmt werden soll, dafs nur die eine Variabele, etwa y, unendlich

*) Auf den Grenzbestimmungen 11) in §. 7, 5) und 10) in §. 8, 2), 12) und 13) in §. 10 beruhen die Fundamentalformeln der Differentialrechnung. Die in §§ 7 und 8 mitgetheilten Beweise der ersten drei Gleichungen sind zuerst vom Verfasser gegeben worden.

wächst oder unendlich abnimmt, während die andere (x) dabei als relativ constant gilt, so ist selbstverständlich ganz nach den früheren Regeln zu verfahren. Als Beispiel diene die Function

$$\frac{x^y - 1}{y};$$

ersetzt man hier y durch eine gegen die Null convergirende Zahl ε und denkt sich x als Constante, so ist wie in §. 8, II

$$Lim_{\varepsilon} \frac{x^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = lx,$$

wobei der an die Sylbe *Lim* angehangene Index ε bedeutet, dafs sich die Operation der Grenzbestimmung lediglich auf die unendliche Abnahme des ε bezieht.

Wesentlich anders gestaltet sich die Sache, wenn der Grenzwerth für den Fall gesucht wird, dafs sich beide Variabelen ändern, sei es nach einander oder gleichzeitig. Diefs möge zunächst an einem einfachen Beispiele erläutert werden, bei dem sich die Grenzwerthe für unendlich abnehmende x und y durch blofses Nullsetzen ergeben. Nimmt man in der Function

1) $$f(x, y) = \frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + ax + by}{x + y}$$

zuerst $y = 0$, so erhält man

$$f(x, 0) = \alpha x + a$$

und hieraus folgt für $x = 0$

$$f(0, 0) = a.$$

Setzt man dagegen in No. 1) zuerst $x = 0$, so wird

$$f(0, y) = \beta y + b$$

und für $y = 0$

$$f(0, 0) = b.$$

Drittens ergiebt sich, wenn in No. 1) $y = \lambda x$ gesetzt und unter λ irgend eine Constante verstanden wird,

$$f(x, \lambda x) = \frac{(\alpha + \beta\lambda^2)\, x + a + b\lambda}{1 + \lambda}$$

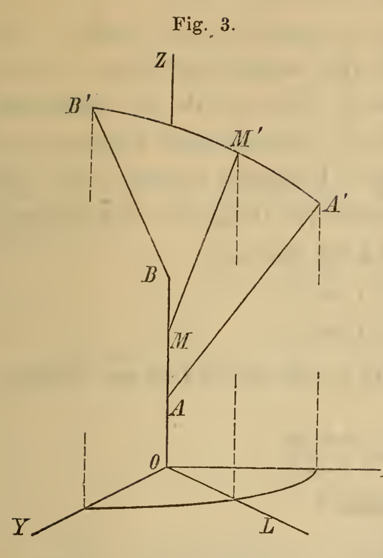
und für $x = 0$

$$f(0, 0) = \frac{a + b\lambda}{1 + \lambda},$$

welcher Ausdruck, wegen der Willkürlichkeit des λ, alle möglichen Werthe haben kann. — Der hiermit bewiesene Satz, dafs im vorliegenden Falle $f(0, 0)$ unendlich vieldeutig ist, verliert sein Befremdliches, sobald man die Sache geometrisch, d. h.

2) $$z = \frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + ax + by}{x + y}$$

Fig. 3.



als Gleichung einer Fläche betrachtet (Fig. 3). Wird nämlich $y = 0$ gesetzt, so ist

$$z = \alpha x + a$$

die Gleichung der Verticalspur, und zwar ist die letztere eine Gerade AA', welche mit der x-Achse den Winkel $\arctan \alpha$ bildet und auf der z-Achse die Strecke $OA = a$ abschneidet; für $x = 0$ geht der Punkt xz in den Punkt A über. Dem analog gelangt man, wenn erst $x = 0$ genommen wird, zur zweiten Verticalspur, welche durch die Gleichung

$$z = \beta y + b$$

bestimmt und ebenfalls eine Gerade BB' ist; nachher $y = 0$ setzen, heifst, auf dieser Geraden bis zum Punkte B herabgehen, der in der Höhe $OB = b$ liegt. Für den dritten Fall bedeutet die Gleichung $y = \lambda x$ eine in der Horizontalebene durch den Coordinatenanfang beliebig gelegte Gerade OL; die Substitution von $y = \lambda x$ in No. 2) giebt

$$3)\qquad z = \frac{\alpha + \beta\lambda^2}{1 + \lambda}\,x + \frac{a + b\lambda}{1 + \lambda}$$

und diefs ist die Gleichung der Verticalprojection des Durchschnittes, welchen die Ebene COZ mit der Fläche bildet. Da beide Projectionen dieses Durchschnittes gerade Linien sind, so ist er selbst eine Gerade MM', welche von der z-Achse die Strecke

$$OM = \frac{a + b\lambda}{1 + \lambda}$$

abschneidet. Für $x = 0$ geht der Punkt xz der Geraden 3) in den Punkt M über. Die betrachtete Fläche gehört demnach zu den windschiefen Flächen, welche dadurch entstehen, dass eine bewegliche Gerade MM' längs der z-Achse fortgleitet und sich gleichzeitig um dieselbe dreht; im vorliegenden Falle ist sie ein einfaches Hyperboloid. Die vorhin genannte Vieldeutigkeit von $f(0, 0)$ erklärt sich nun aus der Entstehung der Fläche, derzufolge der Punkt $00z$ jeder Punkt der z-Achse sein kann.

Um diese verschiedenen Resultate genau und ihrer Herkunft nach bezeichnen zu können, wendet man, wo es nöthig ist, das Zeichen *Lim* zweimal an und hebt jedesmal durch einen Index diejenige Va-

riabele hervor, auf welche sich der Grenzenübergang bezieht. Die Reihenfolge der Indices geht hierbei von rechts nach links; es bedeutet daher $Lim_\delta \; Lim_\varepsilon$, dafs zuerst der Grenzwerth für unendlich abnehmende ε bei constant bleibenden δ ermittelt und nachher der Grenzwerth für unendlich abnehmende δ bestimmt werden soll; dagegen ist unter $Lim_\varepsilon \; Lim_\delta$ der umgekehrte Gang der Operationen zu verstehen. Für das vorige Beispiel ist hiernach

$$Lim_\delta \; Lim_\varepsilon \; f(\delta, \varepsilon) = a,$$

$$Lim_\varepsilon \; Lim_\delta \; f(\delta, \varepsilon) = b;$$

im dritten Falle, wo $\varepsilon = \lambda\delta$ ist, bedarf es der Sylbe *Lim* nur einmal, nämlich

$$Lim_\delta \; f(\delta, \lambda\delta) = \frac{a + b\lambda}{1 + \lambda}.$$

Ein paar weitere Beispiele sind folgende.

a) Lässt man in dem Ausdrucke

$$\frac{(1 + \delta + \varepsilon)^\mu - 1}{a\delta + b\varepsilon}$$

zuerst ε gegen die Null convergiren, so gelangt man zu dem Grenzwerthe

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{(1 + \delta)^\mu - 1}{\delta},$$

welcher (nach §. 7, Formel 11) bei verschwindenden δ in $\frac{1}{a} \cdot \mu$ übergeht; es ist daher

$$Lim_\delta \; Lim_\varepsilon \; \frac{(1 + \delta + \varepsilon)^\mu - 1}{a\delta + b\varepsilon} = \frac{\mu}{a}.$$

Ebenso leicht ergiebt sich bei umgekehrter Anordnung

$$Lim_\varepsilon \; Lim_\delta \; \frac{(1 + \delta + \varepsilon)^\mu - 1}{a\delta + b\varepsilon} = \frac{\mu}{b}.$$

Setzt man $\delta = \alpha\vartheta$, $\varepsilon = \beta\vartheta$, wo α, β Constanten bedeuten und ϑ eine gegen die Null convergirende Zahl ist, so nehmen δ und ε gleichzeitig und zwar so ab, dafs ihr Verhältnifs constant bleibt; es handelt sich dann um den Grenzwerth

$$Lim_\vartheta \; \frac{[1 + (\alpha + \beta)\vartheta]^\mu - 1}{(a\alpha + b\beta)\vartheta},$$

der sich leicht findet, wenn $(\alpha + \beta)\vartheta = \zeta$ gesetzt wird, wo nun ζ unendlich abnimmt; er ist

$$Lim_\zeta \left\{ \frac{\alpha + \beta}{a\alpha + b\beta} \cdot \frac{(1 + \zeta)^\mu - 1}{\zeta} \right\} = \frac{(\alpha + \beta)\mu}{a\alpha + b\beta}.$$

b) Mittelst der Formeln in §. 8, II übersieht man unmittelbar die Richtigkeit folgender Gleichungen

$$Lim_\delta \; Lim_\varepsilon \frac{a^\delta + b^\varepsilon - 2}{\delta + \varepsilon} = Lim_\delta \frac{a^\delta - 1}{\delta} = la,$$

$$Lim_\varepsilon \; Lim_\delta \frac{a^\delta + b^\varepsilon - 2}{\delta + \varepsilon} = Lim_\varepsilon \frac{b^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = lb.$$

Für $\delta = \alpha\vartheta$, $\varepsilon = \beta\vartheta$ wird bei constanten α, β und unendlich abnehmenden ϑ

$$Lim_\delta \frac{a^{\alpha\vartheta} + b^{\beta\vartheta} - 2}{\alpha\vartheta + \beta\vartheta}$$

$$= Lim_\vartheta \left\{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{a^{\alpha\vartheta} - 1}{\alpha\vartheta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{b^{\beta\vartheta} - 1}{\beta\vartheta}\right\} = \frac{\alpha \; la + \beta \; lb}{\alpha + \beta}.$$

Capitel III.

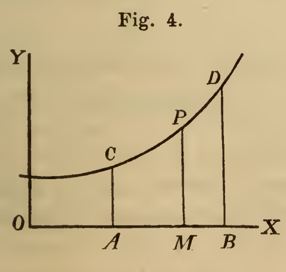
Die Continuität und Discontinuität der Functionen.

§. 12.

Begriff und Kennzeichen der Discontinuität einer Function.

Die unabhängige Variabele einer Function wird zufolge des in §. 1 Gesagten immer als stetig veränderliche Zahl angesehen, bei welcher der Übergang von einem individuellen Werthe zum anderen nur vermittelst Durchganges durch alle möglichen Zwischenstufen erfolgen kann, oder deren individuellen Werthe eine ununterbrochene Reihe bilden. Dem entsprechend wird man eine, mit x durch die Gleichung $y = f(x)$ verbundene abhängige Variabele y nur dann als continuirliche Zahl betrachten dürfen, wenn der Übergang von einem individuellen Werthe des y zum andern ohne Unterbrechung erfolgt. Um diefs völlig klar zu machen, nehmen wir die Sache von der geometrischen Seite und denken uns $y = f(x)$ als Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen ebenen Curve; sollte letztere aus mehreren Zweigen bestehen, so untersuchen wir jeden derselben einzeln.

Fig. 4.



In der Fig. mögen $OA = a$ und $OB = b > a$ zwei beliebige Abscissen sein, denen die Ordinaten $AC = f(a)$ und $BD = f(b)$ entsprechen; hinsichtlich des Curvenstückes CD sind dann zwei Fälle möglich: Die Curve verläuft entweder in einem ununterbrochenen Zuge von C nach D, oder sie erleidet auf dieser

Strecke Unterbrechungen. Im ersten Falle nennen wir $f(x)$ continuirlich von $x = a$ bis $x = b$, im zweiten Falle discontinuirlich.

Den erwähnten Unterbrechungen können verschiedene Ursachen zu Grunde liegen. So ist es erstens möglich, dafs zwar $f(a)$ und $f(b)$ reell sind, dafs aber $f(x)$ für gewisse, zwischen a und b liegende Werthe von x imaginär wird. Die Gleichung z. B.

$$y = \sqrt{(x-1)(x-3)}$$

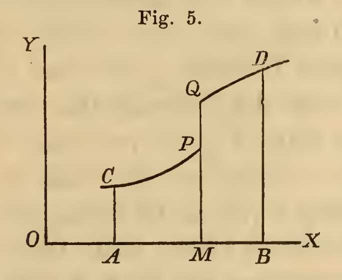
liefert reelle y solange $x \leqq 1$ bleibt, für $1 < x < 3$ wird y imaginär, für $x \geqq 3$ dagegen entstehen wieder reelle y; nimmt man also $a < 1$ und $b > 3$, so sind zwar die anfänglichen und die letzten Ordinaten reell, dazwischen aber liegen imaginäre Ordinaten, und die Curve geht demnach nicht in einem ununterbrochenen Zuge von $x = a$ bis $x = b$. Dasselbe gilt von Curven mit isolirten Punkten wie z. B.

$$y = (x-2)\sqrt{(x-1)(x-3)};$$

diese Curve ist gleichfalls imaginär für $1 < x < 3$ und hat nur in der Mitte dieses Intervalles einen reellen Punkt mit den Coordinaten $x = 2$ und $y = 0$.

Aber selbst in dem Falle, wo $f(x)$ reell bleibt von $x = a$ bis $x = b$, kann eine Unterbrechung der Continuität vorkommen, sobald nämlich an einer Stelle $OM = \xi$ die Ordinate sprungweis von einem Werthe MP zu einem anderen MQ übergeht (s. Fig. 5)*). Zu jener Abscisse gehören hier plötzlich zwei verschiedene Ordinaten, während aufserdem jeder Abscisse nur eine Ordinate entspricht; mit der ersten Ordinate MP schliefst sich die Reihe der bisherigen Ordinaten; die zweite Ordinate MQ bildet den Anfang einer neuen Reihe von Ordinaten. Beachtet man, dafs jedes x, welches weniger als ξ beträgt, durch $\xi - \varepsilon$, und jedes $x > \xi$ durch $\xi + \delta$ ausgedrückt werden kann, wobei selbstverständ-

Fig. 5.



*) Vielleicht ist ein aus dem Leben gegriffenes Beispiel nicht überflüssig. Denkt man sich die Zeit als Abscisse und den jedesmaligen Cassenbestand einer Person als Ordinate aufgetragen, so entsteht eine continuirlich steigende Curve, wenn jenes Individuum während der durch AB dargestellten Zeit unausgesetzt für Lohn arbeitet. Dagegen wird die Curve discontinuirlich, wenn der Arbeiter während derselben Zeit das Glück hat, in der Lotterie zu gewinnen, oder wenn ihm das Unglück widerfährt, einen pecuniären Verlust zu erleiden.

lich δ und ε positive Gröſsen bedeuten, so ist jede frühere Ordinate mit $f(\xi - \varepsilon)$, jede spätere mit $f(\xi + \delta)$ zu bezeichnen und consequentermaſsen ist dann $MP = f(\xi - 0)$, $MQ = f(\xi + 0)$. Bei einer continuirlichen Function sind beide Ordinaten gleich, tritt aber an der Stelle ξ eine Unterbrechung der Continuität ein, so differiren jene Ordinaten um irgend eine angebbare Grösse. Indem wir nun den Fall, wo $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ theilweis imaginär wird, ausschlieſsen, haben wir folgenden Satz:

> Die reelle Function $f(x)$ bleibt innerhalb eines gegebenen Intervalles continuirlich, wenn für alle zwischenliegenden x
> $$Lim\,[f(x + \delta) - f(x - \varepsilon)] = 0$$
> ist; giebt es dagegen innerhalb jenes Intervalles einen oder mehrere Werthe von x, für welche
> $$Lim\,[f(x + \delta) - f(x - \varepsilon)] \gtrless 0$$
> ist, so erleidet $f(x)$ für jeden derartigen Werth von x eine Unterbrechung der Continuität*).

Den Gebrauch dieses Satzes werden die folgenden Beispiele zeigen.

1. Es sei

$$f(x) = \frac{k^2}{x - h};$$

die in Betrachtung zu ziehende Differenz ist im vorliegenden Falle

$$f(x + \delta) - f(x - \varepsilon) = \frac{k^2}{x - h + \delta} - \frac{k^2}{x - h - \varepsilon}.$$

So lange x von h verschieden ist, convergirt dieselbe gleichzeitig mit δ und ε gegen die Null; für $x = h$ dagegen wird jene Differenz zu einer Summe, nämlich

$$f(h + \delta) - f(h - \varepsilon) = \frac{k^2}{\delta} + \frac{k^2}{\varepsilon}$$

und wächst ins Unendliche. Die Function $\dfrac{k^2}{x - h}$ erleidet demnach eine einzige Unterbrechung der Continuität und zwar an der Stelle $x = h$, wo sie von $f(h - 0) = -\infty$ nach $f(h + 0) = +\infty$ überspringt. Dieses Resultat bestätigt sich geometrisch; die Gleichung

---

*) Als Kennzeichen der Continuität findet man häufig die Gleichung

$$Lim\,\{f(x + \delta) - f(x)\} = 0$$

angegeben; dieses Criterium ist aber nicht so sicher als das obige, dessen Nothwendigkeit sich bei einer von Lejeune-Dirichlet zu anderen Zwecken vorgenommenen Untersuchung herausgestellt hat. (Crelle's Journal f. Math. IV, S. 157.)

$$y = \frac{k^2}{x - h}$$

charakterisirt nämlich eine Hyperbel, wovon die eine Asymptote zur x-Achse genommen ist, während die y-Achse parallel zur anderen Asymptote in der Entfernung h liegt. In der That besteht die Curve aus zwei völlig getrennten Zweigen und der Abscisse $x = h$ entsprechen die beiden Ordinaten $y = -\infty$ und $y = +\infty$.

2. Als zweites Beispiel diene die Function

$$f(x) = \frac{k^3}{(x - h)^2}.$$

Auch hier verschwindet gleichzeitig mit δ und ε die Differenz

$$f(x + \delta) - f(x - \varepsilon) = \frac{k^3}{(x - h + \delta)^2} - \frac{k^3}{(x - h - \varepsilon)^2}$$

wofern $x \gtrless h$ ist. Für $x = h$ dagegen stellt sich der Grenzwerth von

$$f(h + \delta) - f(h - \varepsilon) = \frac{k^3}{\delta^2} - \frac{k^3}{\varepsilon^2}$$

unter die Form $\infty - \infty$, die alles Mögliche bedeuten kann, weil δ und ε auf beliebige Weise gegen die Null convergiren dürfen. Nimmt man z. B. $\varepsilon = 2\delta$, so wird

$$Lim\ [f(h + \delta) - f(h - \varepsilon)] = Lim\ \frac{3k^3}{4\delta^2} = \infty;$$

setzt man dagegen

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2},$$

so ergiebt sich

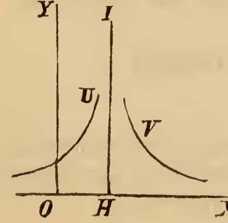
$$Lim\ [f(h + \delta) - f(h - \varepsilon)] = Lim\ [k^3\,(2 + \varepsilon^2)] = 2k^3,$$

mithin erleidet die genannte Function eine Unterbrechung der Continuität an der Stelle $x = h$. Zu demselben Resultate führt die geometrische Darstellung der Function. Die Curve, deren Gleichung

$$y = \frac{k^3}{(x - h)^2}$$

ist, besteht nämlich aus zwei congruenten, völlig gesonderten Zweigen, welche die in der Entfernung $OH = h$ parallel zur Ordinatenachse liegende Gerade HI zur gemeinschaftlichen Asymptote haben (s. Fig. 6). Während jeder Abscisse $\lessgtr h$ nur eine Ordinate entspricht, gehören zur Abscisse h zwei Ordinaten, beide von unendlicher Gröfse; auch ist es nicht möglich, von irgend einem Punkte U

Fig. 6.



des einen Zweiges nach dem Punkte V des anderen Zweiges zu gelangen.

3. Um auch ein Beispiel zu geben, bei welchem $f(\xi - 0)$ und $f(\xi + 0)$ von endlicher Gröfse sind, betrachten wir die Function

$$f(x) = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{\pi} \operatorname{arctan} \frac{a}{x-a}.$$

Da der Quotient $\frac{a}{x-a}$ an der Stelle $x - a$ sich discontinuirlich ändert, so ist auch hier die Discontinuität von $f(x)$ zu erwarten; in der That hat man

$$f(a-\varepsilon) = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{\pi} \operatorname{arctan} \left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)$$

oder zufolge der Gleichung $\operatorname{arctan}(-z) = -\operatorname{arctan} z$

$$f(a-\varepsilon) = \frac{c+b}{2} - \frac{c-b}{\pi} \operatorname{arctan} \left(\frac{a}{\varepsilon}\right)$$

und bei verschwindenden ε, wenn a als positiv vorausgesetzt wird,

$$f(a-0) = \frac{c+b}{2} - \frac{c-b}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = b.$$

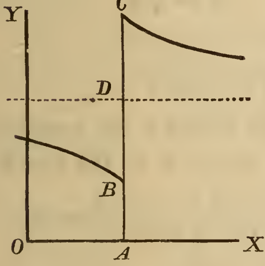
Ferner ergiebt sich

$$f(a+\delta) = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{\pi} \operatorname{arctan} \left(\frac{a}{\delta}\right),$$

$$f(a+0) = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = c.$$

An der Stelle $x = a$ springt also die Function von dem Werthe b nach dem Werthe c über. Die Figur giebt ein Bild der Curve, welche durch die Gleichung

Fig. 7.



$$y = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{\pi} \operatorname{arctan} \frac{a}{x-a}$$

charakterisirt wird; darin ist $OA = a$, $AB = b$, $AC = c$. Die beiden, rechts und links von ABC liegenden Zweige der Curve sind congruent und von entgegengesetzter Lage; sie besitzen eine gemeinschaftliche Asymptote, welche in der Entfernung $AD = \frac{1}{2}(b+c)$ parallel zur Abscissensache liegt.

§. 13.

Allgemeine Sätze.

1. Es sei $f(x)$ eine gebrochene Function, etwa

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

und sowohl der Zähler als der Nenner continuirlich, so kann doch der Quotient discontinuirlich werden und zwar geschieht diefs jedesmal, wenn der Nenner für gewisse Werthe von x zu Null wird und wenn in diesen Fällen der Zähler endliche Werthe besitzt. Bezeichnen wir nämlich mit ξ einen der speciellen Werthe von x, für welche der Nenner verschwindet, und setzen

$$\psi(\xi + \delta) = \lambda, \qquad \psi(\xi - \varepsilon) = \mu,$$

so bedeuten λ und μ Gröfsen, welche gleichzeitig mit δ und ε gegen die Null convergiren, mithin ist, weil für $x = \xi$ der Zähler nicht verschwindet,

$$Lim \left\{ f(\xi + \delta) - f(\xi - \varepsilon) \right\} = Lim \left\{ \frac{\varphi(\xi + \delta)}{\lambda} - \frac{\varphi(\xi - \varepsilon)}{\mu} \right\}$$
$$= \frac{\varphi(\xi)}{0} - \frac{\varphi(\xi)}{0} = \infty - \infty.$$

Nun sind aber δ und ε von einander unabhängig, mithin sind es auch λ und μ; der Ausdruck $\infty - \infty$ kann daher im vorliegenden Falle jeden beliebigen Werth haben.

Die Richtigkeit der letzteren Bemerkung läfst sich an jedem einzelnen Beispiele näher darlegen. Ist z. B.

$$\varphi(x) = sin\, x, \qquad \psi(x) = cos^2\, x, \qquad \xi = \tfrac{1}{2}\pi,$$

so folgt

$$f(\tfrac{1}{2}\pi + \delta) - f(\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon) = \frac{cos\, \delta}{sin^2\, \delta} - \frac{cos\, \varepsilon}{sin^2\, \varepsilon},$$

und hier kann man durch geeignete Wahl von δ und ε die verschiedensten Grenzwerthe zum Vorschein bringen. So ist z. B. für $\varepsilon = 2\delta$

$$Lim \left\{ f(\tfrac{1}{2}\pi + \delta) - f(\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon) \right\} = Lim \frac{4\, cos^3\, \delta - cos\, 2\, \delta}{4\, sin^2\, \delta\, cos^2\, \delta} = \infty,$$

für $\varepsilon = \frac{1}{2}\delta$ dagegen entsteht der Grenzwerth $-\infty$.

2. Die Function $f(x)$ sei die Summe von m continuirlichen Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$; man hat dann die Gleichungen

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_m(x),$$
$$f(x + \delta) - f(x - \varepsilon)$$
$$= [F_1(x + \delta) - F_1(x - \varepsilon)] + [F_2(x + \delta) - F_2(x - \varepsilon)] + \ldots$$
$$\ldots + [F_m(x + \delta) - F_m(x - \varepsilon)].$$

Zufolge der vorausgesetzten Continuität von $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$

kann jede der eingeklammerten Differenzen beliebig klein gemacht werden, wenn man nur δ und ε hinreichend klein wählt; bezeichnet daher ϱ einen willkürlichen positiven echten Bruch, so lassen sich δ und ε so wählen, dafs jede der genannten Differenzen zwischen $+\varrho$ und $-\varrho$ fällt, mithin

$$m\varrho > f(x+\delta) - f(x-\varepsilon) > -m\varrho$$

wird. Bei unendlich abnehmenden ϱ convergirt das Product $m\varrho$ gegen die Null, folglich hat man auch

$$Lim\ [f(x+\delta) - f(x-\varepsilon)] = 0$$

d. h. die Summe einer endlichen Menge continuirlicher Functionen ist gleichfalls continuirlich. Für eine unendliche Menge von Summanden darf man diesen Satz nicht ohne Weiteres anwenden, denn das Product $m\varrho$ kann sich einer von Null verschiedenen Grenze nähern, wenn m unendlich wächst, während ϱ gegen die Null convergirt. In der That werden später Fälle vorkommen, wo die Summe einer unendlichen Menge stetiger Functionen discontinuirlich ist.

Befindet sich unter den Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ eine einzige discontinuirliche, so erleidet auch die Summe $f(x)$ eine Unterbrechung der Continuität und zwar an derselben Stelle wie jener einzelne Summand. Diese Bemerkung gilt aber im Allgemeinen nicht mehr, wenn mehrere der Functionen für denselben Werth von x discontinuirlich werden, vielmehr kann es dann geschehen, dafs sich die Discontinuitäten aufheben. So sind z. B. $sec\ x$ und $x^2 - sec\ x$ gleichzeitig discontinuirlich, ihre Summe aber ist eine continuirliche Function.

*3. Wenn mehrere Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ zu einem Producte vereinigt werden, etwa

$$f(x) = F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot F_3(x) \dots F_m(x),$$

so hat man

$$\begin{aligned} & f(x+\delta) - f(x-\varepsilon) \\ = \quad & F_2(x+\delta)\ F_3(x+\delta) \dots F_m(x+\delta)\,[F_1(x+\delta) - F_1(x-\varepsilon)] \\ + & F_1(x-\varepsilon)\ F_3(x+\delta) \dots F_m(x+\delta)\,[F_2(x+\delta) - F_2(x-\varepsilon)] \\ + & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + & F_1(x-\varepsilon)\ F_2(x-\varepsilon) \dots F_{m-1}(x-\varepsilon)\,[F_m(x+\delta) - F_m(x-\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dafs $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ stetige Functionen sind, convergirt jeder dieser m Summanden gegen die Null, mithin gilt dasselbe von der Summe (nach derselben Schlufsweise wie in No. 2), d. h. das Product aus einer endlichen Anzahl continuirlicher Functionen ist gleichfalls continuirlich.

Für eine unendliche Menge von Factoren gilt dieser Satz im Allgemeinen nicht mehr.

Befindet sich unter den Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, .. $F_m(x)$ eine einzige discontinuirliche, so kann das Product discontinuirlich werden, doch ist es auch möglich, daſs die Discontinuität durch einen der übrigen Factoren aufgehoben wird. Von den drei Factoren z. B.

$$F_1(x) = sec\, x, \qquad F_2(x) = x^2, \qquad F_3(x) = cos\, x$$

erleidet der erste Unterbrechungen der Stetigkeit unter den Stellen $x = \pm \frac{1}{2}\pi$, $\pm \frac{3}{2}\pi$ etc., während die beiden übrigen Factoren immer continuirlich sind; das Product $f(x) = x^2$ bleibt aber continuirlich.

4. Die bisherigen Erörterungen sind leicht auf Functionen mehrerer Variabelen auszudehnen. Handelt es sich um eine Function zweier Variabelen, etwa $z = f(x, y)$, so denkt man sich erst für y irgend einen individuellen Werth h gesetzt und hat es dann nur mit einer Function von x zu thun, die man nach den gegebenen Regeln untersucht; nachher ändert man h, indem man sich vorstellt, daſs h der Reihe nach alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt. Geometrisch heiſst dieſs: man betrachtet die Fläche, deren Gleichung $z = f(x, y)$ ist, als die stetige Folge aller der Schnitte, welche sie mit Ebenen parallel zur xz-Ebene bildet. Ähnlich verhält sich die Sache bei Functionen mehrerer Variabelen; obschon hier die geometrische Bedeutung aufhört, so bleibt doch das analytische Verfahren immer das nämliche.

Capitel IV.

Die Mittelwerthe der Functionen.

§. 14.

Der mittlere Werth einer Function.

Eine der elegantesten und zugleich brauchbarsten Anwendungen der Lehre von den Grenzwerthen der Functionen bildet die Bestimmung des mittleren Werthes, welchen eine Function innerhalb eines gegebenen Intervalles besitzt. Man gelangt hierzu auf folgendem Wege.

Die Function $y = f(x)$ ändere sich continuirlich von $x = a$ bis $x = b$ und sei auſserdem so beschaffen, daſs jedem, das Intervall a bis b nicht überschreitenden x nur ein y entspricht; ferner denke man sich die Strecke $b - a$ in n gleiche Theile getheilt und nenne δ einen solchen Theil, wonach

$$\delta = \frac{b - a}{n} \quad \text{oder} \quad b = a + n\delta$$

ist. Giebt man nun dem x der Reihe nach die n Werthe

$$a, \quad a + \delta, \quad a + 2\delta, \quad a + 3\delta, \ \ldots \ a + (n - 1)\delta,$$

deren letzter mit $b - \delta$ übereinkommt, so erhält y ebensoviel individuelle Werthe, die folgendermafsen bezeichnet werden mögen

$$y_0 = f(a), \quad y_1 = f(a + \delta), \quad y_2 = f(a + 2\delta), \ \ldots\ldots$$
$$y_{n-1} = f(a + [n - 1]\delta).$$

Das arithmetische Mittel dieser n Functionswerthe ist

$$\frac{y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}}{n}$$
$$= \frac{f(a) + f(a + \delta) + f(a + 2\delta) + \cdots + f(a + [n - 1]\delta)}{n},$$

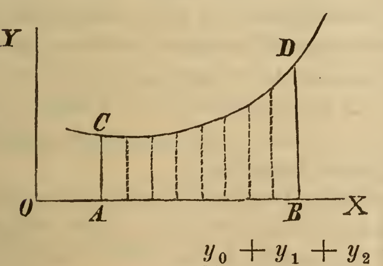
und giebt eine ungefähre Vorstellung von dem mittleren Werthe, welchen die Function innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ besitzt. Je gröfser die Zahl n ist, je mehr Functionswerthe also berücksichtigt werden, desto genauer erhält man auch den mittleren Werth der Function, und wenn man zur Grenze für unendlich wachsende n übergeht, so folgen die verschiedenen Werthe des x stetig aufeinander und der Ausdruck

$$Lim \frac{f(a) + f(a + \delta) + f(a + 2\delta) + \cdots + f(a + [n - 1]\delta)}{n}$$

ist nunmehr das arithmetische Mittel aus allen den unendlich vielen Werthen, welche die Function nacheinander erhält, während x das Intervall a bis b stetig durchläuft; jener Grenzwerth mag daher der Mittelwerth der Function, bezogen auf das Intervall $x = a$ bis $x = b$, heifsen.

Diese Betrachtungen sind leicht geometrisch zu deuten, wenn man wie früher $y = f(x)$ als Gleichung einer Curve ansieht und $OA = a$, $OB = b$ als Abscissen abschneidet. (s. Fig. 8.) Die Strecke AB ist dann in n gleiche Theile zu theilen, und δ bezeichnet einen solchen Theil; ferner sind y_0, y_1, y_2, $\ldots y_{n-1}$ die Ordinaten, welche den n Abscissen a, $a+\delta$, $a+2\delta, \ldots$ $a + (n - 1)\delta$ entsprechen, und der Quotient

Fig. 8.



$$\frac{y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}}{n}$$

giebt den mittleren Werth jener Ordinaten. Durch Übergang zur

Grenze für unendlich wachsende n gelangt man zum arithmetischen Mittel aus allen zwischen AC und BD möglichen Ordinaten d. h. zum Mittelwerthe der Ordinaten innerhalb der Strecke AB*).

Um zunächst einen einfachen Fall vor Augen zu haben, nehmen wir beispielweis

$$y = cx,$$

wo c einen constanten Factor bezeichnet. Hier ist

$$y_0 = ca, \qquad y_1 = c(a + \delta), \qquad y_2 = c(a + 2\delta), \ldots$$
$$y_{n-1} = c(a + [n-1]\delta);$$

unter Anwendung der bekannten Summenformel

$$1 + 2 + 3 \ldots . + (n-1) = \tfrac{1}{2} n (n-1)$$

erhält man als arithmetisches Mittel

$$\frac{y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}}{n} = c\left[a + \tfrac{1}{2}(n-1)\delta\right]$$

oder vermöge des Werthes von δ

$$\frac{y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}}{n} = \tfrac{1}{2} c \left(b + a - \frac{b-a}{n}\right)$$

und durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n

$$Lim \frac{y_0 + y_1 \cdots + y_{n-1}}{n} = \tfrac{1}{2} c (b + a) = \frac{ca + cb}{2}.$$

Geometrisch heifst diefs: wenn die Linie CD eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade ist, so kommt der Mittelwerth aller zwischen AC und BD liegenden Ordinaten überein mit dem arithmetischen Mittel aus AC und BD, was auch unmittelbar ersichtlich ist.

*) Derartige Mittelwerthe kommen nicht selten in der Physik vor. Sind nämlich zu den Zeiten a, $a + \delta$, $a + 2\delta$, ... $a + (n-1)\delta$ die veränderlichen Gröfsen $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ (z. B. Temperaturen, Barometerstände u. dergl.) beobachtet worden, so giebt das arithmetische Mittel der letzteren den genäherten Mittelwerth von y während der Zeit $b - a$. Der genaue Mittelwerth würde erst dann erreicht werden, wenn alle zwischen die Zeiten a und b fallenden y beobachtet wären d. h. wenn der stetige Verlauf des y vorläge. Dieser läfst sich in vielen Fällen durch einen selbstregistrirenden Apparat beschaffen, dessen Einrichtung gewöhnlich darin besteht, dafs ein beweglicher Stift auf einen mit gleichförmiger Geschwindigkeit um seine Achse rotirenden Cylinder diejenige Curve aufzeichnet, deren Ordinaten die verschiedenen Werthe der zu beobachtenden Variabelen darstellen. Denkt man sich den Cylindermantel in eine Ebene abgewickelt, so entsteht eine Curve, worin die Beobachtungszeiten als Abscissen, die beobachteten Werthe als zugehörige Ordinaten erscheinen, und wo nun die Aufgabe ganz dieselbe ist wie in der obigen geometrischen Darstellung.

Zur Berechnung der Mittelwerthe aller möglichen Functionen liefert die höhere Analysis die nöthigen Vorschriften; bei den meisten einfachen Functionen führen indessen auch elementare Methoden zum Ziele. Fälle der letzteren Art hat der Verf. auf eigenthümliche Weise im Cap. IV zusammengestellt, welches demnach als eine Vorstudie zur Integralrechnung gelten kann.

Als zweites Beispiel diene die Annahme

$$y = \frac{x^2}{c}.$$

Mit Hülfe der Summenformel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \tfrac{1}{6} n (n-1)(2n-1)$$

findet man sehr leicht

$$\frac{y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}}{n}$$

$$= \frac{1}{c} [a^2 + a(n-1)\delta + \tfrac{1}{6}(n-1)(2n-1)\delta^2].$$

Nach Substitution des Werthes von δ bringt man die rechte Seite durch einige Zusammenziehung auf die Form

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3c} - \frac{b^2 - a^2}{2n} + \frac{(b-a)^2}{6n^2}$$

und daraus ergiebt sich

$$Lim \frac{y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}}{n} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3c}$$

Geometrisch ist diefs der Mittelwerth aller Parabelordinaten, welche zwischen $x = a$ und $x = b$ eingeschaltet werden können. Am einfachsten gestaltet sich das Resultat, wenn man $a = 0$ setzt d. h. die Parabelordinaten vom Scheitel an nimmt; es wird nämlich der obige Mittelwerth $= \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{c}$ d. i. gleich dem dritten Theile der letzten Ordinate.

Bevor wir ausführlichere Untersuchungen über Mittelwerthe folgen lassen, wollen wir erst eine Vereinfachung der allgemeinen Formel erwähnen. Wenn nämlich x das Intervall $x = a$ bis $x = b$ durchläuft, so ändert sich die Differenz $x - a$ von 0 bis $b - a$; man kann daher $x - a = \xi$ setzen, ξ als neue unabhängige Variabele betrachten und dieser den Spielraum von $\xi = 0$ bis $\xi = b - a$ anweisen; ferner ist jetzt $f(x) = f(a + \xi)$, und da $f(a + \xi)$ wieder eine Function von ξ darstellt, so mag dafür kürzer $F(\xi)$ geschrieben werden. Nach diesen Substitutionen geht der Ausdruck

$$Lim \frac{f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \dots + f(a+[n-1]\delta)}{n}$$

in den folgenden über

$$Lim \frac{F(0) + F(\delta) + F(2\delta) + \dots + F([n-1]\delta)}{n},$$

d. h. der Mittelwerth von $f(x)$ bezogen auf das Intervall $x = a$ bis $x = b$, ist einerlei mit dem Mittelwerthe von $F(\xi)$, wenn letzterer auf das Intervall $\xi = 0$ bis $\xi = b - a$ bezogen wird. Man wird

leicht bemerken, daſs diese Operation analytisch Dasselbe ist wie geometrisch die Verlegung des Coordinatenanfanges von O nach A; die Abscisse x wird dabei um a verkleinert, mithin ist $x - a = \xi$ die neue Abscisse, und an die Stelle der früheren Curvengleichung $y = f(x)$ tritt die neue $y = f(a + \xi) = F(\xi)$.

Da ferner a und b nur der Bedingung $b > a$ unterworfen sind, so kann $b - a$ jede beliebige positive Gröſse bedeuten und mit irgend einem Buchstaben bezeichnet werden. Wir wollen dafür x selber gebrauchen, so daſs jetzt

$$Lim\, \frac{F(0) + F(\delta) + F(2\delta) + \ldots + F([n-1]\delta)}{n},$$

$$\left(\delta = \frac{x}{n}, \qquad x > 0\right),$$

das arithmetische Mittel aller Ordinaten darstellt, welche sich auf der Strecke x errichten lassen. Dasselbe mag schlechthin der Mittelwerth von $F(x)$ heiſsen und mit $\mathfrak{M}F(x)$ bezeichnet werden, wobei $\mathfrak{M}$ keinen Factor, sondern nur die Abkürzung der Worte „Mittelwerth von“ bedeutet. Vermöge des Werthes von δ gilt nun die Gleichung

$$\mathfrak{M}F(x) = Lim \left\{\frac{1}{n}\left[F(0) + F\left(\frac{x}{n}\right) + F\left(\frac{2x}{n}\right) + \ldots + F\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)\right]\right\}$$

als Definition des Symboles $\mathfrak{M}F(x)$.

Die rechte Seite dieser Gleichung läſst sich noch etwas einfacher darstellen. Wenn nämlich eine Partie von gleichartigen Gröſsen u_0, $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ zu addiren ist, so schreibt man statt

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

kürzer

$$\Sigma u_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$$

und liest „Summe aller der Gröſsen, welche aus u für $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ hervorgehen;“ demgemäſs kann man die vorige Gleichung in die folgende zusammenziehen

$$\mathfrak{M}F(x) = Lim\left[\frac{1}{n}\Sigma F\left(\frac{kx}{n}\right)\right],$$

wobei nur ein für alle Mal zu merken ist, daſs k die Werthe 0, 1, 2, ... $(n-1)$ erhalten soll.

§. 15.

Der Mittelwerth der Potenz.

Zufolge der gegebenen Definition wird der Mittelwerth von x^p durch folgende Gleichung bestimmt

$$\mathfrak{M}(x^p) = Lim\left\{\frac{1}{n}\left[0^p + \left(\frac{x}{n}\right)^p + \left(\frac{2x}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^p\right]\right\};$$

damit 0^p nicht unendlich werde, müssen wir p als positive Gröfse voraussetzen, wir haben dann einfacher

$$\mathfrak{M}(x^p) = Lim \left\{ \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (n-1)^p}{n^{p+1}} x^p \right\}$$

oder, weil der Factor x^p kein n enthält,

$$1) \qquad \mathfrak{M}(x^p) = \left[Lim \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (n-1)^p}{n^{p+1}} \right] x^p.$$

In dem speciellen Falle, wo p eine ganze Zahl ist, lässt sich der nöthige Grenzwerth mittelst der in §. 7 entwickelten Ungleichungen finden; es ist nämlich für jedes $a > b > 0$

$$(p+1)\, a^p > \frac{a^{p+1} - b^{p+1}}{a - b}$$

mithin für $a = z$, $b = z - 1$

$$2) \qquad z^p > \frac{z^{p+1} - (z-1)^{p+1}}{p+1}.$$

Man hat ferner

$$(p+1)\, b^p < \frac{a^{p+1} - b^{p+1}}{a - b}$$

folglich wenn $b = z$, $a = z + 1$ gesetzt wird

$$3) \qquad z^p < \frac{(z+1)^{p+1} - z^{p+1}}{p+1}.$$

Die beiden Ungleichungen 2) und 3) gestatten folgende übersichtlichere Zusammenstellung

$$\frac{(z+1)^{p+1} - z^{p+1}}{p+1} > z^p > \frac{z^{p+1} - (z-1)^{p+1}}{p+1}.$$

und daraus ergeben sich für $z = 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ folgende specielle Relationen

$$\frac{2^{p+1} - 1^{p+1}}{p+1} > 1^p > \frac{1^{p+1}}{p+1},$$

$$\frac{3^{p+1} - 2^{p+1}}{p+1} > 2^p > \frac{2^{p+1} - 1^{p+1}}{p+1},$$

$$\frac{4^{p+1} - 3^{p+1}}{p+1} > 3^p > \frac{3^{p+1} - 2^{p+1}}{p+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}}{p+1} > (n-1)^p > \frac{(n-1)^{p+1} - (n-2)^{p+1}}{p+1}.$$

Die Summe dieser Ungleichungen ist

$$\frac{n^{p+1} - 1}{p+1} > 1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p > \frac{(n-1)^{p+1}}{p+1},$$

wobei linker Hand die negative Einheit weggelassen werden kann,

weil dadurch die Ungleichung stärker wird; ferner liefert die Division mit n^{p+1}

$$\frac{1}{p+1} > \frac{1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p}{n^{p+1}} > \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p+1}}{p+1}.$$

Bei unendlich wachsenden n und constant bleibenden p convergirt $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p+1}$ gegen die Einheit, und daher wird die vorige Ungleichung zur Gleichung

$$4) \qquad Lim \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1};$$

mithin ist nach Formel 1)

$$5) \qquad \mathfrak{M}(x^p) = \frac{x^p}{p+1},$$

wobei p eine ganze positive Zahl sein mufs.

Für nicht ganze positive p gilt ein ähnlicher Satz, dessen Beweis aber nicht so einfach ausfällt; die Mittheilung desselben können wir um so eher übergehen, als bei späteren Anwendungen der Formel 5) immer nur der Fall eines ganzen positiven p in Frage kommen wird.

§. 16.

Die Mittelwerthe der Exponentialgröfse, des Sinus und Cosinus.

I. Für den Fall $F(x) = a^x$ haben wir nach der Definition des Mittels

$$\mathfrak{M}(a^x) = Lim \frac{a^0 + a^\delta + a^{2\delta} + \ldots + a^{(n-1)\delta}}{n},$$

wo $\delta = \frac{x}{n}$ ist. Giebt man der im Zähler stehenden Gröfsenreihe die Form

$$1 + a^\delta + (a^\delta)^2 + (a^\delta)^3 + \ldots + (a^\delta)^{n-1},$$

so erkennt man darin eine geometrische Progression und hat als Summe derselben

$$\frac{(a^\delta)^n - 1}{a^\delta - 1} = \frac{a^{n\delta} - 1}{a^\delta - 1} = \frac{a^x - 1}{a^\delta - 1}.$$

Demnach wird

$$\mathfrak{M}(a^x) = Lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{a^x - 1}{a^\delta - 1}\right)$$

oder auch, wenn man $\frac{1}{n}$ durch $\frac{\delta}{x}$ ersetzt,

$$\mathfrak{M}(a^x) = Lim\left[\frac{\frac{a^x - 1}{x}}{\frac{a^\delta - 1}{\delta}}\right];$$

der Zähler bleibt ungeändert, wenn δ gegen die Null convergirt, der Nenner hat la zur Grenze (§. 8, No. 11), mithin ist

1) $$\mathfrak{M}(a^x) = \frac{a^x - 1}{x\, la}.$$

Besser noch gestaltet sich diese Formel, wenn man statt a die Basis e einführt, indem man $la = \alpha$ oder $a = e^\alpha$ setzt; es wird nämlich

2) $$\mathfrak{M}(e^{\alpha x}) = \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x}.$$

II. Der Mittelwerth des Sinus bestimmt sich durch die Gleichung

3) $$\mathfrak{M}\,(sin\ x)$$
$$= Lim\ \frac{sin\,\delta + sin\,2\,\delta + sin\,3\,\delta + \ldots + sin\,(n-1)\delta}{n},$$

wo es zunächst auf die Summirung der im Zähler stehenden Sinus ankommt. Bezeichnen wir den Werth des Zählers mit U und multipliciren die Gleichung

$$U = sin\,\delta + sin\,2\,\delta + sin\,3\,\delta + \ldots + sin\,(n-1)\,\delta$$

mit $2\,sin\,\frac{1}{2}\delta$, so können wir rechter Hand jedes doppelte Sinusproduct in eine Cosinusdifferenz verwandeln, indem wir die Formel

$$2\,sin\,A\,sin\,B = cos\,(A - B) - cos\,(A + B)$$

benutzen; wir erhalten

$$\begin{aligned} 2\,U\,sin\,\tfrac{1}{2}\delta = {} & cos\,\tfrac{1}{2}\delta - cos\,\tfrac{3}{2}\delta \\ & + cos\,\tfrac{3}{2}\delta - cos\,\tfrac{5}{2}\delta \\ & + cos\,\tfrac{5}{2}\delta - cos\,\tfrac{7}{2}\delta \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + cos\,(n - \tfrac{3}{2})\,\delta - cos\,(n - \tfrac{1}{2})\,\delta \end{aligned}$$

d. i. nach gehöriger Hebung

$$2\,U\,sin\,\tfrac{1}{2}\delta = cos\,\tfrac{1}{2}\delta - cos\,(n - \tfrac{1}{2})\,\delta.$$

Hieraus ergiebt sich U, und zufolge der usprünglichen Bedeutung dieses Ausdrucks gilt nun die Summenformel

4) $$sin\,\delta + sin\,2\,\delta + sin\,3\,\delta + \ldots + sin\,(n-1)\,\delta$$
$$= \frac{cos\,\frac{1}{2}\delta - cos\,(n - \frac{1}{2})\,\delta}{2\,sin\,\frac{1}{2}\delta}$$

Bei der Anwendung von No. 3) ist zu berücksichtigen, dafs $n\delta = x$, folglich

$$cos\,(n - \tfrac{1}{2})\,\delta = cos\,(n\delta - \tfrac{1}{2}\delta) = cos\,(x - \tfrac{1}{2}\delta)$$

ist; ersetzt man ferner in No. 3) den Divisor n durch den Factor $\frac{\delta}{x}$,

so hat man

$$\mathfrak{M}(\sin x) = Lim \left[\frac{\cos \frac{1}{2}\delta - \cos(x - \frac{1}{2}\delta)}{x} \cdot \frac{\frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta}\right]$$

und bei Ausführung des angedeuteten Grenzenüberganges

5) $$\mathfrak{M}(\sin x) = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

Auf ganz gleiche Weise kann man auch das etwas allgemeinere Resultat

6) $$\mathfrak{M}(\sin \beta x) = \frac{1 - \cos \beta x}{\beta x}$$

finden, worin β einen beliebigen constanten Factor bezeichnet.

III. Der Mittelwerth des Cosinus bestimmt sich durch die Gleichung

7) $$\mathfrak{M}(\cos x) = Lim \frac{1 + \cos \delta + \cos 2\delta + \cos 3\delta + \ldots + \cos(n-1)\delta}{n},$$

und hier ist zunächst der Zähler in eine kürzere Form zu bringen. Wir setzen deſshalb

$$V = 1 + \cos \delta + \cos 2\delta + \cos 3\delta + \ldots + (n-1)\delta,$$

multipliciren beiderseits mit $2 \sin \frac{1}{2}\delta$ und zerlegen rechter Hand jedes doppelte Product nach der Formel

$$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B);$$

wir erhalten

$$\begin{aligned} 2V \sin \tfrac{1}{2}\delta = {} & 2 \sin \tfrac{1}{2}\delta \\ & + \sin \tfrac{3}{2}\delta - \sin \tfrac{1}{2}\delta \\ & + \sin \tfrac{5}{2}\delta - \sin \tfrac{3}{2}\delta \\ & + \sin \tfrac{7}{2}\delta - \sin \tfrac{5}{2}\delta \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \sin(n - \tfrac{1}{2})\delta - \sin(n - \tfrac{3}{2})\delta \end{aligned}$$

d. i. nach gehöriger Hebung

$$2V \sin \tfrac{1}{2}\delta = \sin \tfrac{1}{2}\delta + \sin(n - \tfrac{1}{2})\delta.$$

Hieraus findet sich V und man hat daher die Summenformel

8) $$1 + \cos \delta + \cos 2\delta + \cos 3\delta + \ldots + \cos(n-1)\delta = \frac{\sin \frac{1}{2}\delta + \sin(n - \frac{1}{2})\delta}{2 \sin \frac{1}{2}\delta}.$$

Indem wir dieſs zur Umwandlung der Formel 7) benutzen und $n\delta = x$, $n = \frac{x}{\delta}$ setzen, gelangen wir zu der Gleichung

$$\mathfrak{M}(\cos x) = Lim \left[\frac{\sin \frac{1}{2}\delta + \sin(x - \frac{1}{2}\delta)}{x} \cdot \frac{\frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta}\right]$$

d. i.

9) $$\mathfrak{M}(\cos x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Nach demselben Verfahren erhält man leicht die etwas allgemeinere Formel

10) $$\mathfrak{M}(\cos \beta x) = \frac{\sin \beta x}{\beta x}.$$

Die bisher entwickelten Mittelwerthe der Potenz, die Exponentialgröſse, des Sinus und des Cosinus sind die einzigen, deren Aufsuchung keine besonderen Kunstgriffe erfordert; um aber die verschiedenen Mittel zu zeigen, welche in anderen Fällen benutzt werden können, verfolgen wir den Gegenstand weiter. Dabei wird sich auch das wichtige Resultat ergeben, daſs die Functionen $l(1+x)$, $\arctan x$ und $\arcsin x$ als Mittelwerthe gewisser algebraischer Functionen betrachtet werden dürfen.

§. 17.

Der Mittelwerth von $(1+x)^{-1}$.

Wir erinnern zunächst an die in §. 7 bewiesenen Ungleichungen

$$a^m - b^m > m(a-b)\, b^{m-1},$$
$$a^m - b^m < m(a-b)\, a^{m-1},$$

welche für jedes ganze positive m gelten, wenn $a > b > 0$ ist. In der ersten Ungleichung nehmen wir

$$a = 1 + \frac{z}{m}, \qquad b = 1,$$

wobei z eine beliebige positive Gröſse bedeuten möge; dieſs giebt

$$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m - 1 > z$$

und durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende m

1) $$e^z - 1 > z \quad \text{oder} \quad e^z > 1 + z.$$

In der zweiten Ungleichung setzen wir

$$a = 1, \qquad b = 1 - \frac{z}{m},$$

und erhalten

$$1 - \left(1 - \frac{z}{m}\right)^m < z$$

und durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende m

$$1 - e^{-z} < z \quad \text{oder} \quad e^{-z} > 1 - z$$

und umgekehrt, wenn z ein positiver echter Bruch ist,

2) $$e^z < \frac{1}{1-z}.$$

Die unter No. 1) und 2) gefundenen Resultate stellen wir in der Form

$$\frac{1}{1-z} > e^z > 1 + z, \qquad (0 < z < 1)$$

zusammen und nehmen überall die natürlichen Logarithmen; diefs giebt

3) $$l\left(\frac{1}{1-z}\right) > z > l(1+z), \qquad (0 < z < 1).$$

Ertheilt man dem z der Reihe nach die Werthe

$$\frac{\delta}{1}, \quad \frac{\delta}{1+\delta}, \quad \frac{\delta}{1+2\delta}, \quad \frac{\delta}{1+3\delta}, \ldots \frac{\delta}{1+(n-1)\delta},$$

worin δ einen positiven echten Bruch bezeichnen möge, so erhält man die folgenden Ungleichungen

$$l\left(\frac{1}{1-\delta}\right) > \frac{\delta}{1} > l\left(\frac{1+\delta}{1}\right),$$

$$l\left(\frac{1+\delta}{1}\right) > \frac{\delta}{1+\delta} > l\left(\frac{1+2\delta}{1+\delta}\right),$$

$$l\left(\frac{1+2\delta}{1+\delta}\right) > \frac{\delta}{1+2\delta} > l\left(\frac{1+3\delta}{1+2\delta}\right),$$

$$l\left(\frac{1+3\delta}{1+2\delta}\right) > \frac{\delta}{1+3\delta} > l\left(\frac{1+4\delta}{1+3\delta}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l\left(\frac{1+(n-1)\delta}{1+(n-2)\delta}\right) > \frac{\delta}{1+(n-1)\delta} > l\left(\frac{1+n\delta}{1+(n-1)\delta}\right),$$

und die Summe derselben ist bei gehöriger Hebung

$$l\left(\frac{1+(n-1)\delta}{1-\delta}\right)$$

$$> \delta\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\delta}+\frac{1}{1+2\delta}+\cdots\cdot+\frac{1}{1+(n-1)\delta}\right] > l(1+n\delta).$$

Die in Parenthesen stehende Summe ist dieselbe, worauf man bei der Bestimmung des Mittelwerthes von $\frac{1}{1+x}$ kommen würde, daher ist für $\delta = \frac{x}{n}$

4) $$\frac{1}{x}\left[l\left(1+x-\frac{x}{n}\right) - l\left(1-\frac{x}{n}\right)\right]$$

$$> \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\delta}+\frac{1}{1+2\delta}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)\delta}\right] >$$

$$\frac{1}{x}\,l(1+x)$$

und durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n

5) $$\mathfrak{M}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{l(1+x)}{x}.$$

Hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dafs der natürliche Lo-

garithmus durch den Mittelwerth der algebraischen Function $\frac{1}{1+x}$ dargestellt werden kann. Damit ist gleichzeitig eine Methode zur Berechnung der natürlichen Logarithmen gewonnen, denn bei grofsen n mufs näherungsweis die Gleichung gelten

$$\frac{l(1+x)}{x} = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{1+\frac{x}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2x}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{(n-1)x}{n}}\right]$$

oder

$$l(1+x) = x\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} + \frac{1}{n+2x} + \dots + \frac{1}{n+(n-1)x}\right].$$

Zum praktischen Gebrauch empfiehlt sich diese Formel nicht sonderlich, da man für n eine sehr ansehnliche Zahl nehmen müfste, um einige Genauigkeit zu erreichen. Die Sache läfst sich aber unter einem anderen Gesichtspunkte betrachten.

Nach einer bekannten Formel hat man

$$\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1}$$

oder für $\alpha = -\beta$

$$\frac{1+(-1)^{m+1}\beta^m}{1+\beta} = 1 - \beta + \beta^2 - \dots + (-1)^{m-1}\beta^{m-1};$$

denken wir uns β als positiv und setzen für m eine gerade Zahl $2k$, so geht der Zähler in $1-\beta^{2k}$ über und beträgt weniger als die Einheit; daher ist

$$6)\qquad \frac{1}{1+\beta} > 1 - \beta + \beta^2 + \beta^3 + \dots - \beta^{2k-1}.$$

Setzen wir dagegen m gleich einer ungeraden Zahl $2k+1$, so übersteigt der nunmehrige Zähler $1+\beta^{2k-1}$ die Einheit und daher ist

$$7)\qquad \frac{1}{1+\beta} < 1 - \beta + \beta^2 - \dots - \beta^{2k-1} + \beta^{2k}.$$

Die beiden Ungleichungen 6) und 7) benutzen wir, um aus No. 4) zwei neue Resultate abzuleiten. Es ist nämlich erstens

$$\frac{1}{x}\left[l\left(1+x-\frac{x}{n}\right) - l\left(1-\frac{x}{n}\right)\right]$$
$$> \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{1+\frac{x}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2x}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{(n-1)x}{n}}\right]$$

und wenn man rechter Hand die Ungleichung 6) auf jeden einzelnen Bruch anwendet, so erhält man bei Zusammenfassung der gleichartigen Gröfsen

$$\frac{1}{x}\left[l\left(1+x-\frac{x}{n}\right)-l\left(1-\frac{x}{n}\right)\right]$$
$$>1-\frac{1+2+3+\ldots.+(n-1)}{n^2}x$$
$$+\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n-1)^2}{n^3}x^2$$
$$-\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots.+(n-1)^3}{n^4}x^3$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\frac{1^{2k-1}+2^{2k-1}+\ldots.+(n-1)^{2k-1}}{n^{2k}}x^{2k-1}.$$

Durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n folgt hieraus, wenn man erst die Formel 4) in §. 15 benutzt und nachher mit x multiplicirt

8) $$l(1+x)>x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots-\frac{1}{2k}x^{2k}.$$

Andererseits ist vermöge der Ungleichung 4)

$$\frac{1}{x}l(1+x)$$
$$<\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{1+\frac{x}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2x}{n}}+\ldots.+\frac{1}{1+\frac{(n-1)x}{n}}\right]$$

und wenn man rechter Hand die Ungleichung 7) auf jeden einzelnen Bruch anwendet, so gelangt man leicht zu dem Ergebnisse

$$\frac{1}{x}l(1+x)$$
$$<1-\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}x$$
$$+\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}x^2$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1^{2k}+2^{2k}+\ldots.+(n-1)^{2k}}{n^{2k+1}}x^{2k}.$$

Durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n und nachherige Multiplication mit x folgt hieraus

9) $$l(1+x)<x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\ldots..$$
$$\ldots.-\frac{1}{2k}x^{2k}+\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}.$$

Mittelst der Bemerkung, dafs jede zwischen A und $B>A$ liegende Zahl durch $A+\varrho\,(B-A)$ dargestellt werden kann, wo ϱ

einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch darstellt, lassen sich die Ungleichungen 8) und 9) zu einer Gleichung zusammenziehen, nämlich

10) $$l(1+x) = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}{}^4x \ldots\ldots - \frac{1}{2k}x^{2k} + \frac{\varrho}{2k+1}x^{2k+1},$$
$$0 < \varrho < 1.$$

Dieses Resultat ist besonders bei echt gebrochenen x von Werth, weil man in diesem Falle die willkürliche ganze Zahl k so grofs wählen kann, dafs x^{2k+1}, mithin auch der letzte Summand, kleiner als irgend ein gegebener Bruch wird; die Grenzen, zwischen denen $l(1+x)$ liegt, lassen sich also bei echt gebrochenen x beliebig eng ziehen. Für $x = 0{,}3$ z. B. hat man folgende Rechnung

$\frac{1}{1}(0{,}3)$	$=$	$0{,}3$
$-\frac{1}{2}(0{,}3)^2$	$=$	$-0{,}045$
		$0{,}255$
$+\frac{1}{3}(0{,}3)^3$	$=$	$+0{,}009$
		$0{,}264$
$-\frac{1}{4}(0{,}3)^4$	$=$	$-0{,}002025$
		$0{,}261975$
$+\frac{1}{5}(0{,}3)^5$	$=$	$+0{,}000486$
		$0{,}262461$
$-\frac{1}{6}(0{,}3)^6$	$=$	$-0{,}0001215$
		$0{,}2623395$
$+\frac{1}{7}(0{,}3)^7$	$=$	$+0{,}000031243$
		$0{,}262370743$
$-\frac{1}{8}(0{,}3)^8$	$=$	$-0{,}000008201$
		$0{,}262362542$
$+\frac{1}{9}(0{,}3)^9$	$=$	$+0{,}000002187$
		$0{,}262364729$ u. s. w.

Setzt man daher der Reihe nach $k = 1, 2, 3$ etc., so liegt $l(1{,}3)$ zwischen

0,255	und	0,264
0,261975	-	0,262461
0,2623395	-	0,262370743
0,262362542	-	0,262364729

und es ist daher auf fünf Decimalen genau $l(1{,}3) = 0{,}26236$, was mit den Tafeln übereinstimmt.

§. 18.

Der Mittelwerth von $(1 + x^2)^{-1}$.

Durch Anwendung der bekannten goniometrischen Formel

$$\tan A - \tan B = \frac{\sin (A - B)}{\cos A \cos B}$$

überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$1) \qquad \frac{\tan (\alpha + \beta) - \tan \alpha}{\beta} = \frac{\sin \beta}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\cos (\alpha + \beta) \cos \alpha}$$

worin α und $\alpha + \beta$ zwei beliebige Bögen des ersten Quadranten bedeuten mögen. Unter dieser Voraussetzung ist (§. 10, No. 1)

$$\frac{\sin \beta}{\beta} > \cos \beta,$$

ferner

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta < \cos \alpha \cos \beta;$$

ersetzt man daher in No. 1) den Factor $\frac{\sin \beta}{\beta}$ durch $\cos \beta$ und im Nenner $\cos (\alpha + \beta)$ durch $\cos \alpha \cos \beta$, so erhält man

$$\frac{\tan (\alpha + \beta) - \tan \alpha}{\beta} > \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

oder

$$2) \qquad [\tan (\alpha + \beta) - \tan \alpha] \cos^2 \alpha > \beta.$$

Diese Beziehung gestaltet sich für unsere Zwecke brauchbarer, wenn wir die Substitutionen

$$\tan \alpha = z, \qquad \tan (\alpha + \beta) = z + \delta$$

vornehmen; zufolge der Voraussetzung, das α und $\alpha + \beta$ gleichzeitig im ersten Quadranten liegen, ist jetzt

$$\alpha = \arctan z, \qquad \alpha + \beta = \arctan (z + \delta),$$

$$\beta = \arctan (z + \delta) - \arctan z,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + z^2},$$

$$3) \qquad \frac{\delta}{1 + z^2} > \arctan (z + \delta) - \arctan z.$$

Um eine zweite und ähnliche Relation zu finden, gehen wir von der Gleichung aus

$$\frac{\tan \alpha - \tan (\alpha - \beta)}{\beta} = \frac{\sin \beta}{\beta} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \cos (\alpha - \beta)}.$$

Rechter Hand ersetzen wir den Factor $\frac{\sin \beta}{\beta}$ durch die gröfsere Einheit und $\cos (\alpha - \beta)$ durch den kleineren $\cos \alpha$; wir haben dann

$$\frac{\tan\alpha - \tan(\alpha-\beta)}{\beta} < \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

oder

4) $$[\tan\alpha - \tan(\alpha-\beta)]\cos^2\alpha < \beta.$$

Es sei ferner sowohl α als $\alpha-\beta$ ein Bogen des ersten Quadranten,

$$\tan\alpha = z, \qquad \tan(\alpha-\beta) = z-\delta,$$

so ist umgekehrt

$$\alpha = \arctan z, \qquad \alpha-\beta = \arctan(z-\delta),$$
$$\beta = \arctan z - \arctan(z-\delta),$$

und die Ungleichung 4) geht dann in die folgende über

5) $$\frac{\delta}{1+z^2} < \arctan z - \arctan(z-\delta).$$

Aus No. 3) und 5) zusammen folgt

$$\arctan z - \arctan(z-\delta) > \frac{\delta}{1+z^2} > \arctan(z+\delta) - \arctan z;$$

wir nehmen hier der Reihe nach $z = \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots. (n-1)\delta$, addiren alle entstehenden Ungleichungen und fügen überall noch δ hinzu, diefs giebt die neue Ungleichung

$$\arctan([n-1]\delta) + \delta >$$
$$\delta\left[1 + \frac{1}{1+\delta^2} + \frac{1}{1+(2\delta)^2} + \frac{1}{1+(3\delta)^2} + \ldots + \frac{1}{1+([n-1]\delta)^2}\right]$$
$$> \arctan(n\delta) + \delta - \arctan\delta,$$

welche noch stärker wird, wenn man die zuletzt vorkommende positive Differenz $\delta - \arctan\delta$ wegläfst. Für $n\delta = x$ und durch beiderseitige Division mit x folgt

6) $$\frac{1}{x}\arctan\left(x - \frac{x}{n}\right) + \frac{1}{n} >$$
$$\frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{n}\right)^2} + \ldots. + \frac{1}{1+\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}\right]$$
$$> \frac{1}{x}\arctan x,$$

und es erhellt unmittelbar, dafs diese Relation zur Bestimmung des Mittelwerthes von $\frac{1}{1+x^2}$ dienen kann. Durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende x ergiebt sich in der That

7) $$\mathfrak{M}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{x}\arctan x,$$

womit der bemerkenswerthe Satz gewonnen ist, dafs *arctan* x durch

den Mittelwerth der algebraischen Function $\frac{1}{1+x^2}$ ausgedrückt werden kann. Gleichzeitig liegt hierin eine Methode zur Berechnung eines Bogens, wenn seine Tangente gegeben und $= x$ ist, denn für grofse n mufs die Gleichung

$$\operatorname{arctan} x = \frac{x}{n}\left[1 + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}\right]$$

wenigstens näherungsweis richtig sein. So erhält man z. B. für $x = 1$ und $n = 10$

$$\frac{\pi}{4} = 10\left\{\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{104} + \frac{1}{109} + \frac{1}{116} + \frac{1}{125} + \frac{1}{136} + \frac{1}{149} + \frac{1}{164} + \frac{1}{181}\right\}$$

d. i.

$$\tfrac{1}{4}\pi = 0{,}70998;$$

die nicht unbedeutende Abweichung von dem wahren Werthe $\frac{1}{4}\pi = 0{,}7854$ zeigt, dafs man n weit gröfser nehmen müfste, um eine erträgliche Genauigkeit zu erreichen. Hierdurch wird aber das Verfahren sehr unbequem.

Dagegen gelangt man zu viel brauchbareren Formeln, wenn man die im vorigen Paragraphen entwickelten Ungleichungen

$$8)\qquad \frac{1}{1+\beta} > 1 - \beta + \beta^2 - \beta^3 + \ldots - \beta^{2k-1},$$

$$9)\qquad \frac{1}{1+\beta} < 1 - \beta + \beta^2 - \beta^3 + \ldots + \beta^{2k}$$

der Reihe nach für

$$\beta = \left(\frac{x}{n}\right)^2, \quad \left(\frac{2x}{n}\right)^2, \quad \left(\frac{3x}{n}\right)^2, \ldots \left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2$$

auf No. 6) anwendet. Zunächst ergiebt sich

$$\frac{1}{x}\operatorname{arctan}\left(x - \frac{x}{n}\right) + \frac{1}{n}$$

$$> 1 - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}x^2$$

$$+ \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4}{n^5}x^4$$

$$- \frac{1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + (n-1)^6}{n^7}x^6$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$- \frac{1^{4k-2} + 2^{4k-2} + \ldots + (n-1)^{4k-2}}{n^{4k-1}}x^{4k-2};$$

durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n und durch Multiplication mit x folgt hieraus

10) $$arctan\, x > x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \dots \dots \dots \dots - \frac{1}{4k-1}x^{4k-1}.$$

Benutzt man dagegen die Formel 9) zur Umwandlung von No. 6), so hat man erst

$$\frac{1}{x}\, arctan\, x < 1 - \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}x^2 + \frac{1^4+2^4+3^4+\dots+(n-1)^4}{n^5}x^4 - \dots \dots + \frac{1^{4k}+2^{4k}+\dots\dots+(n-1)^{4k}}{n^{4k+1}}x^{4k}$$

und nachher durch Übergang zur Grenze

11) $$arctan\, x < x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \dots\dots - \frac{1}{4k-1}x^{4k-1} + \frac{1}{4k+1}x^{4k+1}.$$

Aus den gefundenen Ungleichungen läſst sich eine Gleichung bilden, wenn man einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch ϱ einführt; es ist nämlich

12) $$arctan\, x = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \dots\dots \dots - \frac{1}{4k-1}x^{4k-1} + \frac{\varrho}{4k+1}x^{4k+1},$$
$$0 < \varrho < 1.$$

Diese Formel leistet im Falle $x < 1$ gute Dienste, weil sich dann k so groſs wählen läſst, daſs x^{4k+1} beliebig klein gemacht werden kann. Nimmt man z. B.

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 0{,}2679492,$$

was gerade der Werth von tan 15° ist, so hat man für $k = 2$ folgende Rechnung

$$\begin{array}{rr} x = & 0{,}2679492 \\ -\tfrac{1}{3}x^3 = & -\;0{,}0064126 \\ \hline & 0{,}2615366 \\ +\tfrac{1}{5}x^5 = & +\;0{,}0002762 \\ \hline & 0{,}2618128 \\ -\tfrac{1}{7}x^7 = & -\;0{,}0000142 \\ \hline & 0{,}2617986 \\ +\tfrac{1}{9}x^9 = & +\;0{,}0000008 \\ \hline & 0{,}2617994. \end{array}$$

Demnach liegt der gesuchte Bogen zwischen 0,2617986 und 0,2617994 und es ist also auf sechs Decimalen

$$arctan\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)=0{,}261799;$$

in der That stimmt dieser Werth mit $arc\ 15^0=\frac{1}{12}\pi$ in sechs Stellen überein.

§. 19.

Der Mittelwerth von $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Durch Anwendung der bekannten goniometrischen Formel

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

findet man augenblicklich

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha}{\beta}=\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta}.$$

Der erste Factor rechter Hand beträgt weniger als $\cos\alpha$, der zweite weniger als die Einheit, daher ist

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha}{\beta}<\cos\alpha$$

oder

1) $$\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha}{\cos\alpha}<\beta.$$

Dieser Ungleichung geben wir dadurch eine andere Form, dafs wir

$$\sin\alpha=z,\qquad \sin(\alpha+\beta)=z+\delta$$

und gleichzeitig α und $\alpha+\beta$ als Bögen des ersten Quadranten voraussetzen. Zufolge der vorstehenden Substitution ist nämlich

$$\alpha=\arcsin z,\qquad \alpha+\beta=\arcsin(z+\delta),$$

$$\beta=\arcsin(z+\delta)-\arcsin z,$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-z^2},$$

mithin wird aus No. 1)

2) $$\frac{\delta}{\sqrt{1-z^2}}<\arcsin(z+\delta)-\arcsin z,$$

Zu einer ähnlichen Relation gelangt man dadurch, dafs man von der Gleichung

$$\frac{\sin\alpha-\sin(\alpha-\beta)}{\beta}=\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta}$$

ausgeht und für die beiden Factoren rechter Hand kleinere Werthe setzt. Da nun $\cos(\alpha-\beta)$ mehr als $\cos\alpha$ beträgt, so hat man

$$\cos\alpha+\cos(\alpha-\beta)>2\cos\alpha$$

oder

$$2 \cos (\alpha - \tfrac{1}{2}\beta) \cos \tfrac{1}{2}\beta > 2 \cos \alpha$$

folglich

$$\cos (\alpha - \tfrac{1}{2}\beta) > \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{1}{2}\beta}.$$

Ferner ist nach §. 10, Formel 1)

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta} > \cos \tfrac{1}{2}\beta,$$

und durch Substitution dieser kleineren Werthe erhält man aus der letzten Gleichung:

$$\frac{\sin \alpha - \sin (\alpha - \beta)}{\beta} > \cos \alpha$$

oder

3) $$\frac{\sin \alpha - \sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha} > \beta.$$

Unter der Voraussetzung, dafs α und $\alpha - \beta$ im ersten Quadranten liegen, sei

$$\sin \alpha = z, \qquad \sin (\alpha - \beta) = z - \delta,$$

mithin

$$\alpha = \arcsin z, \qquad \alpha - \beta = \arcsin (z - \delta),$$
$$\beta = \arcsin z - \arcsin (z - \delta);$$

die Ungleichung 3) wird dann zur folgenden

4) $$\frac{\delta}{\sqrt{1 - z^2}} > \arcsin z - \arcsin (z - \delta).$$

Die gewonnenen Resultate stellen wir in der übersichtlicheren Form zusammen

$$\arcsin (z + \delta) - \arcsin z > \frac{\delta}{\sqrt{1 - z^2}} > \arcsin z - \arcsin (z - \delta),$$

nehmen der Reihe nach $z = \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots (n - 1)\delta$, und addiren alle entstehenden Ungleichungen, wobei wir überall noch δ hinzufügen; diefs giebt

$$\arcsin (n\delta) - (\arcsin \delta - \delta) >$$
$$\delta \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (2\delta)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1 - ([n-1]\delta)^2}}\right]$$
$$> \arcsin ([n - 1]\delta) + \delta,$$

welche Ungleichung noch stärker wird, wenn man die linke Seite um die positive Gröfse $\arcsin \delta - \delta$ vergröfsert. Für $n\delta = x$ wird ferner

5)
$$\frac{1}{x}\, arcsin\, x >$$
$$\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{n}\right)^2}}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}}\right]>\frac{1}{x}\, arcsin\left(x-\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{n},$$

und es erhellt unmittelbar, daſs diese Ungleichung zur Bestimmung des Mittelwerthes von $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ dienen kann. Man gelangt so zu der Formel

6)
$$\mathfrak{M}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{x}\, arcsin\, x,$$

worin sich der Satz ausspricht, daſs die Function *arcsin x* durch den Mittelwerth der algebraischen Function $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ dargestellt werden kann. Gleichzeitig ergiebt sich hieraus ein Verfahren, um den Bogen zu finden, wenn der Sinus bekannt und $= x$ ist, denn für groſse n muſs die Gleichung

$$arcsin\, x =$$
$$\frac{x}{n}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}}\right]$$

wenigstens näherungsweis gelten. Man erreicht indessen nur dann eine erhebliche Genauigkeit, wenn man für n eine sehr bedeutende Zahl nimmt, und daher ist das Verfahren nicht bequem. Wir werden später zeigen, wie sich der angedeutete Grenzübergang ausführen und damit eine vollkommen brauchbare Formel entwickeln läſst.

§. 20.

Die Mittelwerthe zusammengesetzter Functionen.

I. Wenn $F(x)$ aus zwei anderen Functionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ so zusammengesetzt ist, daſs die Gleichung

$$F(x) = A\Phi(x) + B\Psi(x)$$

stattfindet, wo A und B irgend welche Constanten bedeuten, so hat man auch

$$F(0) = A\Phi(0) + B\Psi(0),$$
$$F\left(\frac{x}{n}\right) = A\Phi\left(\frac{x}{n}\right) + B\Psi\left(\frac{x}{n}\right),$$
$$F\left(\frac{2x}{n}\right) = A\Phi\left(\frac{2x}{n}\right) + B\Psi\left(\frac{2x}{n}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und erhält daraus sehr leicht

$$\frac{1}{n}\left[F(0) + F\left(\frac{x}{n}\right) + F\left(\frac{2x}{n}\right) + \ldots + F\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)\right]$$
$$= A \cdot \frac{1}{n}\left[\Phi(0) + \Phi\left(\frac{x}{n}\right) + \Phi\left(\frac{2x}{n}\right) + \ldots + \Phi\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)\right]$$
$$+ B \cdot \frac{1}{n}\left[\Psi(0) + \Psi\left(\frac{x}{n}\right) + \Psi\left(\frac{2x}{n}\right) + \ldots + \Psi\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)\right].$$

Durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n giebt diefs

$$\mathfrak{M}F(x) = A\,.\,\mathfrak{M}\Phi(x) + B\,.\,\mathfrak{M}\Psi(x),$$

oder zufolge der ursprünglichen Bedeutung von $F(x)$

1) $$\mathfrak{M}[A\,.\,\Phi(x) + B\,.\,\Psi(x)] = A\,.\,\mathfrak{M}\Phi(x) + B\,.\,\Psi(x).$$

Für $A = B = 1$ liegt hierin der Satz: Der Mittelwerth von der Summe zweier Functionen ist gleich der Summe von den Mittelwerthen der einzelnen Functionen; für $A = 1$, $B = -1$ erhält man einen analogen, leicht in Worte zu fassenden Satz.

Auf gleiche Weise, wie Formel 1) abgeleitet wurde, kann man auch folgende allgemeinere Formel entwickeln

2) $$\mathfrak{M}[A_1\Phi_1(x) + A_2\Phi_2(x) + \ldots + A_k\Phi_k(x)]$$
$$= A_1\,.\,\mathfrak{M}\Phi_1(x) + A_2\,.\,\mathfrak{M}\Phi_2(x) + \ldots + A_k\,.\,\mathrm{W}\,\Phi_k(x),$$

welche für jede endliche Anzahl von Summanden gilt. Dagegen darf man sie nicht ohne Weiteres auf unendliche k anwenden, weil der Grenzwerth der Summe einer unendlichen Menge von Functionen nicht nothwendig gleich der Summe der Grenzwerthe der einzelnen Summanden zu sein braucht (§. 6).

Die Formel 2) dient zur Berechnung der Mittelwerthe aller solchen Functionen, welche sich in Theile zerlegen lassen, deren Mittelwerthe schon bekannt sind. So hat man z. B.

$$\mathfrak{M}[\alpha + \beta x^2)^3] = \mathfrak{M}[\alpha^3 + 3\alpha^2\beta x^2 + 3\alpha\beta^2 x^4 + \beta^3 x^6]$$
$$= \mathfrak{M}(\alpha^3) + 3\alpha^2\beta\,\mathfrak{M}(x^2) + 3\alpha\beta^2\,\mathfrak{M}(x^4) + \beta^3\,\mathfrak{M}(x^6)$$
$$= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta\frac{x^2}{3} + 3\alpha\beta^2\frac{x^4}{5} + \beta^3\frac{x^6}{7}.$$

Als zweites Beispiel diene die Bestimmung des Mittelwerthes von $\cos^2 x$; es ist

$$\mathfrak{M}(\cos^2 x) = \mathfrak{M}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}(\cos 2x)$$

oder

$$\mathfrak{M}(\cos^2 x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\sin 2x}{x}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

$$\mathfrak{M}(\sin^2 x) = \mathfrak{M}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}(\cos 2x)$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\sin 2x}{x}.$$

II. Wenn die Function $F(x)$ von $x = 0$ an bis zu irgend einem Werthe $x = a$ positiv bleibt, so sind für $x \leqq a$ die sämmtlichen Werthe

$$F(0) \quad F\left(\frac{x}{n}\right), \quad F\left(\frac{2x}{n}\right), \ldots F\left(\frac{(n-1)x}{n}\right).$$

positiv, mithin ist es auch ihr arithmetisches Mittel, sowie dessen Grenzwerth. Man hat daher den Satz: So lange die Function $F(x)$ von $x = 0$ an positiv bleibt, so lange hat auch $\mathfrak{M}F(x)$ einen positiven Werth.

Hieraus folgt ein sehr brauchbares Theorem, wenn man sich $F(x)$ als Differenz zweier Functionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ denkt, also

$$F(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

und dem entsprechend

$$\mathfrak{M}F(x) = \mathfrak{M}\Phi(x) - \mathfrak{M}\Psi(x)$$

setzt. Ist nämlich $\Phi(x) > \Psi(x)$, so bleibt $F(x)$ positiv, mithin ist $\mathfrak{M}F(x)$ positiv, und dieſs kann nur der Fall sein, wenn $\mathfrak{M}\Phi(x) > \mathfrak{M}\Psi(x)$ ist. Man hat daher den folgenden Satz, der übrigens geometrisch unmittelbar einleuchtet: wenn von zwei Functionen die erste immer gröſsere Werthe als die zweite hat, so ist auch ihr Mittelwerth der gröſsere von den Mittelwerthen beider Functionen.

So erhält man z. B. aus der Ungleichung

$$1 > \cos x,$$

wenn man beiderseits die Mittelwerthe nimmt

$$1 > \frac{\sin x}{x} \text{ oder } x > \sin x$$

wie man ohnehin weiſs. Durch Wiederholung des Verfahrens gelangt man zu dem neuen Resultate

$$\frac{x}{2} > \frac{1 - \cos x}{x} \text{ oder } \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Die nochmalige Bildung der Mittelwerthe giebt

$$\frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} \text{ oder } \sin x > x - \frac{x^3}{2 \cdot 3};$$

wiederum ist nach demselben Verfahren

$$\frac{1-\cos x}{x} > \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2\,.\,3\,.\,4}$$

oder

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4},$$

ferner mit Hülfe der Mittelwerthe

$$\frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{2\,.\,3} + \frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

oder

$$\sin x < x - \frac{x^3}{2\,.\,3} + \frac{x^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}.$$

Man übersieht leicht, wie sich dieses einfache Verfahren fortsetzen lässt und dafs man hierdurch beliebig viele Ungleichungen ableiten kann, die sich wechselweise auf den Cosinus und Sinus beziehen.

Stellt man zunächst alle für den Cosinus geltenden Ungleichungen zusammen, so hat man

$$\cos x < 1,$$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2},$$

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}$$

u. s. w.

d. i. wenn p irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots + \frac{x^{4p}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(4p)},$$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots + \frac{x^{4p}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(4p)} - \frac{x^{4p+2}}{1\,.\,2\ldots(4p+2)}.$$

Eine Zahl, welche gröfser als S aber kleiner als T ist, kann immer unter Form $T - \varrho\,(T - S)$ dargestellt werden, wenn man unter ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch versteht; daher lassen sich die obigen Ungleichungen in folgende Gleichung zusammenziehen:

$$3)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots + \frac{x^{4p}}{1\,.\,2\ldots(4p)} - \frac{\varrho x^{4p+2}}{1\,.\,2\ldots(4p+2)}.$$

Durch Zusammenstellung aller Ungleichungen, in denen $\sin x$ vorkommt, hat man ferner

$$\sin x < x,$$

$$\sin x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$\sin x < \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5},$$

$$\sin x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \frac{x^7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7},$$

u. s. w.

oder allgemein ausgedrückt,

$$\sin x < \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \dots$$
$$\dots + \frac{x^{4p+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,(4p+1)},$$

$$\sin x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \dots$$
$$\dots\dots - \frac{x^{4p+3}}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,(4p+3)}.$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$4)\qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \dots + \frac{x^{4p+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,(4p+1)}$$
$$- \frac{\varrho x^{4p+3}}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,(4p+3)},$$

worin ϱ wieder einen positiven echten Bruch bedeutet, dessen Werth nicht näher angegeben werden kann.

Die Gleichungen 3) und 4) lassen sich zur Berechnung von $\cos x$ und $\sin x$ auf ganz ähnliche Weise benutzen wie die Formel 10) in §. 17 zur Berechnung der natürlichen Logarithmen. Wir kommen später darauf zurück.

§. 21.

Geometrische Anwendungen.

I. Die Quadratur ebener Curven. Wie in §. 14 bezeichne $y = F(x)$ die Gleichung einer ebenen krummen Linie, welche von $x = 0$ an bis zu irgend einem individuellen Werthe des x reelle und endliche, sich stetig ändernde Ordinaten besitzen möge. Unter dieser Voraussetzung schliefsen die Abscisse $OM = x$ (s. Fig. 9), die

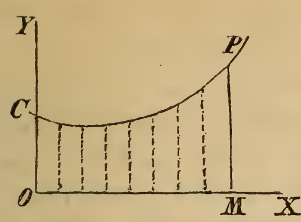


Fig. 9.

Ordinaten $OC = F(0)$, $MP = F(x)$ und das Curvenstück CP eine endliche Fläche $COMP = V$ ein, deren Bestimmung wir uns zur Aufgabe machen.

Ein Mittel zur näherungsweisen Lösung dieses Problemes bietet sich leicht dar. Theilt man nämlich die Abscisse x in eine groſse Anzahl gleicher Theile und errichtet in jedem Theilpunkte eine Ordinate, so zerfällt die Fläche $COMP$ in eine gleiche Menge von Streifen, deren Breite um so geringer ausfällt, je gröſser die Anzahl jener Theile ist. Mit einiger Aufopferung von Genauigkeit könnte man jeden solchen Streifen als Rechteck ansehen, hiernach seine Fläche berechnen und die Summe dieser Flächen als einen Näherungswerth der Fläche $COMP$ betrachten. Setzt man die Anzahl der Theile $= n$, so hat jedes Rechteck die Basis $\frac{x}{n}$; den Abscissen $0, \frac{x}{n}, \frac{2x}{n}$ u. s. w. entsprechen die Ordinaten

$$y_0 = F(0), \quad y_1 = F\left(\frac{x}{n}\right), \quad y_2 = F\left(\frac{2x}{n}\right), \; \ldots \\ y_{n-1} = F\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)$$

und diese sind die Höhen der verschiedenen Rechtecke. Demnach ergiebt sich für die Summe aller Rechtecksflächen, welche S_n heiſsen möge,

$$S_n = \frac{x}{n} y_0 + \frac{x}{n} y_1 + \frac{x}{n} y_2 + \cdots + \frac{x}{n} y_{n-1} \\ = \frac{x}{n}\left[F(0) + F\left(\frac{x}{n}\right) + F\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + F\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)\right].$$

So gewiss nun S_n einen Näherungswerth der gesuchten Fläche darstellt, so ungewiſs ist der Grad der erreichten Genauigkeit, und es bedarf daher noch einer besonderen Untersuchung, ob man durch fortwährende Vergröſserung der Theilzahl n sich der Fläche $COMP$ beliebig weit nähern kann, oder mit anderen Worten, ob der Unterschied zwischen V und S_n kleiner als jede angebbare Zahl werden kann.

Da wir die Curve als stetig von C nach P verlaufend voraussetzen, so läſst sich die Differenz zweier benachbarten Ordinaten kleiner als jede beliebige Linie machen, weil es durch hinreichende Vergröſserung der Zahl n jederzeit möglich ist, die Ordinaten einander

beliebig nahe zu rücken. Es sei nun n so grofs gewählt, dafs jede der Ordinatendifferenzen

$$y_0 - y_1, \quad y_1 - y_2, \quad y_2 - y_3, \ldots y_{n-1} - y_n$$

kleiner als die willkürliche Linie λ ist, so trage man λ, von dem oberen Endpunkte jeder Ordinate aus, zweimal ab, einmal nach oben, einmal nach unten, und ziehe durch jeden der erhaltenen Punkte eine Parallele zur Abscissenachse. So bezeichnet z. B. in Fig. 10 $GG'H'H$ einen der Streifen aus Fig. 9, ferner ist $HI = HK = \lambda$ und $II' \parallel KK' = GG'$. Zufolge der Voraussetzung, dafs die Ordinatendifferenz $G'H' - GH$ weniger als λ beträgt, fällt nun der Bogen HH' in das Rechteck $IKK'I'$ und es gilt für die Flächen die Ungleichung

Fig. 10.

$$GG'I'I > GG'H'H > GG'K'K.$$

Indem wir dieselbe auf alle n Streifen anwenden, deren Flächen $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ heifsen mögen, erhalten wir folgende Ungleichungen

$$\frac{x}{n}(y_0 + \lambda) > v_0 > \frac{x}{n}(y_0 - \lambda)$$

$$\frac{x}{n}(y_1 + \lambda) > v_1 > \frac{x}{n}(y_1 - \lambda)$$

$$\frac{x}{n}(y_2 + \lambda) > v_2 > \frac{x}{n}(y_2 - \lambda)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{x}{n}(y_{n-1} + \lambda) > v_{n-1} > \frac{x}{n}(y_{n-1} - \lambda);$$

wir addiren dieselben und bezeichnen mit S_n die Summe der Streifen der Fläche $COMP$; es ist dann

$$S_n + x\lambda > V > S_n - x\lambda$$

oder

$$\lambda x > V - S_n > -\lambda x.$$

Da nun λ, mithin auch λx beliebig klein gemacht werden kann, so folgt, dafs sich der Unterschied zwischen V und S_n unter jede angebbare Gröfse herabbringen läfst, dafs also V der Grenzwerth ist, welchem sich S_n bei unendlich wachsenden n nähert. Zufolge der Bedeutung von S_n ergiebt sich hieraus die Formel

$$V = Lim \left\{ \frac{x}{n} \left[F(0) + F\left(\frac{x}{n}\right) + F\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + F\left(\frac{(n-1)x}{n}\right) \right] \right\}$$

d. i.

1) $$V = x \,.\, \mathfrak{M}F(x) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M}F(x) = \frac{V}{x}.$$

Die über die Abscisse x stehende Fläche ist also gleich dem Rechtecke aus der Abscisse und der mittleren Ordinate, oder, der Mittelwerth aller auf x stehenden Ordinaten ist die Höhe desjenigen Rechtecks, welches dieselbe Basis und gleichen Inhalt mit der über x liegenden Curvenfläche hat.

Mit einer geringen Modification bleiben alle vorigen Betrachtungen auch bei einem schiefwinkligen Coordinatensystem anwendbar, dessen Coordinatenwinkel $XOY = \gamma$ sein möge. Die einzelnen Streifen $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ sind dann Parallelogramme mit den Höhen

$$y_0 \sin\gamma, \quad y_1 \sin\gamma, \quad y_2 \sin\gamma, \ldots y_{n-1} \sin\gamma;$$

es tritt also überall $y \sin\gamma$ an die Stelle von y und daher wird

$$V = x \,.\, \mathfrak{M}F(x) \,.\, \sin\gamma. \tag{2}$$

Als Anwendung der Formeln 1) und 2) geben wir die Quadratur der Kegelschnitte.

Die Parabel. Wenn die Scheiteltangente zur Achse der x, die Parabelachse zur y-Achse, und der ganze Parameter $= c$ genommen wird, so ist die Gleichung der Parabel

$$y = \frac{x^2}{c};$$

für die über der Abscisse x stehende Fläche S erhält man folglich

$$V = x\,\mathfrak{M}\left(\frac{x^2}{c}\right) = x \,.\, \frac{x^2}{3c} = \tfrac{1}{3}xy,$$

was schon Archimedes gefunden hat.

Die Ellipse. Wie gewöhnlich sei die Gleichung der Curve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

die über der Abscisse x stehende Fläche ist hiernach

$$V = x\,\mathfrak{M}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) = \frac{b}{a} \,.\, x\,\mathfrak{M}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Das Product $x \,.\, \mathfrak{M}\sqrt{a^2 - x^2}$ bedeutet geometrisch die über derselben Abscisse stehende Fläche in einem Kreise, dessen Halbmesser $= a$ ist; diese Fläche besteht aus einem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten x, $\sqrt{a^2 - x^2}$ und einem Kreissector, dessen Centriwinkel einen Sinus $= \frac{x}{a}$ besitzt, mithin ist

$$x\,\mathfrak{M}\sqrt{a^2 - x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a},$$

und hieraus folgt für die elliptische Fläche

$$V = \tfrac{1}{2}x \,.\, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}ab \arcsin\frac{x}{a}.$$

Den geometrischen Sinn beider Summanden wird man leicht erkennen.

Für $x = a$ erhält man die Fläche des Ellipsenquadranten $= \frac{1}{4}\pi ab$; die ganze Ellipsenfläche ist daher $= \pi ab = \pi(\sqrt{ab})^2$, d. h. gleich einer Kreisfläche, deren Radius das geometrische Mittel zwischen a und b ausmacht.

Die Hyperbel. Die Asymptoten der Curve nehmen wir zu Coordinatenachsen; ein Scheitel sei C und seine Coordinaten $OA = c$, $AC = OB = c$; ferner mögen OM und MP die Coordinaten irgend eines Hyperbelpunktes bezeichnen; bekanntlich ist dann

$$OM \,.\, MP = OA \,.\, AC = c^2$$

oder wenn $AM = x$ und $MP = y$ gesetzt wird,

$$(c + x)\, y = c^2 \quad \text{woraus} \quad y = \frac{c^2}{c + x}.$$

Demnach ist die über der Strecke AM stehende Fläche $AMPC$

$$V = x \,.\, \mathfrak{M} \frac{c^2}{c + x} \,.\, \sin\gamma,$$

wo γ den Winkel zwischen den Asymptoten bezeichnet. Die hier vorkommende Mittelgröfse bildet den Grenzwerth des Ausdrucks

$$\frac{c^2}{n}\left\{\frac{1}{c} + \frac{1}{c + \frac{x}{n}} + \frac{1}{c + \frac{2x}{n}} + \dots + \frac{1}{c + \frac{(n-1)x}{n}}\right\},$$

und kann leicht gefunden werden, wenn man für den Augenblick $\frac{x}{c} = \xi$ oder $x = c\xi$ setzt; der vorstehende Ausdruck verwandelt sich dann in

$$\frac{c}{n}\left\{1 + \frac{1}{1 + \frac{\xi}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{(n-1)\xi}{n}}\right\}$$

und hiervon ist der Grenzwerth

$$c \,.\, \mathfrak{M} \frac{1}{1 + \xi} = c\,\frac{l(1 + \xi)}{\xi} = \frac{c^2}{x}\, l\left(1 + \frac{x}{c}\right).$$

Für die gesuchte Fläche ergiebt sich nun

$$V = c^2 \sin\gamma \,.\, l\left(1 + \frac{x}{c}\right);$$

die Fläche V verhält sich demnach zur Fläche des Rhombus $OACB$ wie $l\left(1 + \frac{x}{c}\right)$ zur Einheit.

II. Die Cubatur begrenzter Volumina. Rings um die Achse der x liege eine Fläche und es heifse $F(x)$ der Inhalt des

Querschnittes, welchen eine im Endpunkte des x normal zur x-Achse gelegte Ebene mit der Fläche bildet; wenn nun $F(x)$ stetig und endlich bleibt von $x = 0$ bis zu irgend einem individuellen Werthe des x, so umschliefst die Fläche nebst den beiden Querschnitten $F(0)$ und $F(x)$ einen körperlichen Raum von endlicher Gröfse, dessen Bestimmung wir uns zur Aufgabe machen.

Um zunächst einen Näherungswerth für das gesuchte Volumen zu erhalten, denken wir uns die Strecke x in n gleiche Theile getheilt und durch jeden Theilpunkt eine Ebene normal zu x gelegt; hierdurch zerfällt das Volumen in n Schichten, von denen jede die Dicke oder Höhe $\frac{x}{n}$ besitzt. Betrachten wir diese Schichten als Cylinder, deren Querschnitte der Reihe nach sind

$$F(0), \quad F\left(\frac{x}{n}\right), \quad F\left(\frac{2x}{n}\right), \dots F\left(\frac{(n-1)x}{n}\right),$$

so giebt die Summe jener n Cylinder einen Näherungswerth

$$S_n = \frac{x}{n}\left[F(0) + F\left(\frac{x}{n}\right) + F\left(\frac{2x}{n}\right) + \dots + F\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)\right].$$

Zufolge der Voraussetzung, dafs sich die Querschnitte stetig ändern, kann die Differenz zweier benachbarten Querschnitte kleiner als jede beliebig kleine Fläche λ gemacht werden; letztere nehmen wir willkürlich und denken sie uns ringförmig um die einzelnen Querschnitte gelegt, einmal nach Aufsen (additiv), das andere Mal nach Innen (subtractiv). Im ersten Falle lassen sich über den um λ vermehrten Querschnitten Cylinder von der gemeinschaftlichen Höhe $\frac{x}{n}$ bilden, welche die Schichten des Volumens einschliefsen, mithin gröfser als letztere sind; im zweiten Falle erhält man zu kleine Cylinder. Die in Abschnitt I. aufgestellten Ungleichungen bleiben nun dieselben, wenn man unter $y_0, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ die Flächen der einzelnen Querschnitte, unter $v_0, v_1, v_2, \dots v_{n-1}$ die Volumina der Schichten und unter V das gesuchte Volumen versteht. Man gelangt daher zu dem analogen Resultate

$$V = x \, . \, \mathfrak{M} \, F(x)$$

d. h. das Volumen ist das Product aus seiner Höhe in den Mittelwerth aller seiner Querschnitte. Als Beispiele mögen die Flächen zweiten Grades dienen.

Das Ellipsoid. Die Gleichung dieser Fläche ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1;$$

der Querschnitt am Ende des x, senkrecht zur Achse der x gelegt, bildet eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

mithin ist die Querschnittfläche

$$F(x) = \pi\frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2),$$

hieraus ergiebt sich

$$V = x\pi\frac{bc}{a^2}\mathfrak{M}(a^2 - x^2) = \pi\frac{bc}{a^2}(a^2x - \tfrac{1}{3}x^3),$$

und diefs ist das Volumen einer Zone, welche längs der x-Achse die Höhe oder Dicke x besitzt. Für $x = a$ geht V in das Volumen des halben Ellipsoides $= \frac{2}{3}\pi abc$ über; das Volumen des ganzen Ellipsoides ist daher $= \frac{4}{3}\pi abc$ d. h. gleich dem Inhalte einer Kugel, welche das geometrische Mittel aus a, b und c zum Radius hat.

Das einfache Hyperboloid, dessen Gleichung

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

sein möge, wird von einer im Endpunkte des x senkrecht zu x gelegten Ebene in einer Ellipse geschnitten, deren Halbachsen sind

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a}\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Diefs giebt

$$V = x\pi\frac{bc}{a^2}\mathfrak{M}(a^2 + x^2) = \pi\frac{bc}{a^2}(a^2x + \tfrac{1}{3}x^3);$$

in dem speciellen Falle $x = a$ folgt hieraus, dafs die Zone von der Höhe a den nämlichen Inhalt besitzt, wie ein aus den Halbachsen a, b, c construirtes Ellipsoid.

Das getheilte Hyperboloid. Verlegen wir den Coordinatenanfang nach einem Scheitel der Fläche, so haben wir als Gleichung der letzteren

$$\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Der Querschnitt am Ende des x ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{b}{a}\sqrt{2ax + x^2} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a}\sqrt{2ax + x^2},$$

mithin ist das Volumen einer Kappe von der Höhe x

$$V = x\pi\frac{bc}{a^2}\mathfrak{M}(2ax + x^2) = \pi\frac{bc}{a^2}(ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3).$$

Für $x = a$ erhält man $V = \frac{4}{3}\pi abc$ wie beim Ellipsoid.

Das elliptische Paraboloid hat zur Gleichung

$$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 2x,$$

und der Querschnitt ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{2bx}$ und $\sqrt{2cx}$, daher

$$V = x \cdot 2\pi\sqrt{bc} \cdot \mathfrak{M}(x) = \pi\sqrt{bc} \cdot x^2.$$

Der Inhalt der Kappe von der Höhe x beträgt also die Hälfte von dem Volumen des umschriebenen ellyptischen Cylinders.

Das hyperbolische Paraboloid mag durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

dargestellt werden. Sein Querschnitt ist eine Parabel, von welcher die xy-Ebene ein begrenztes Stück abschneidet; betrachten wir nur das über der xy-Ebene liegende Volumen, so ist

$$F(x) = 2 \cdot \tfrac{2}{3}\,\frac{x^2}{2a} \cdot x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

mithin

$$V = x \cdot \tfrac{2}{3}\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}}\,\mathfrak{M}(x^3) = \tfrac{1}{6}\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}}\,x^4.$$

Man bemerkt leicht, dafs dieses Volumen dem Drittheil vom Inhalte des umschriebenen parabolischen Cylinders gleichkommt.

§. 22.

Näherungsweise Bestimmung der Mittelwerthe.

Wenn es nicht gelingen will, den Grenzwerth zu ermitteln, welchem sich der Ausdruck

$$\frac{1}{n}\left[F(0) + F\left(\frac{x}{n}\right) + F\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + F\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)\right]$$

bei unendlich wachsenden n nähert, so bleibt nichts übrig als die wirkliche numerische Berechnung desselben. Letztere kann auf verschiedene Weisen ausgeführt werden, und um diese anschaulich zu machen, denken wir uns die Sache geometrisch, indem wir nicht den Mittelwerth $\mathfrak{M}F(x)$, sondern die ebene Fläche $V = x \cdot \mathfrak{M}F(x)$ berechnen, woraus $\mathfrak{M}F(x)$ immer wieder hergeleitet werden kann.

Setzen wir wie früher

$$\frac{x}{n} = \delta, \qquad F(0) = y_0, \qquad F\left(\frac{x}{n}\right) = y_1, \qquad F\left(\frac{2x}{n}\right) = y_2, \; \ldots,$$

und benutzen das Zeichen $\neq$, um anzudeuten, dafs zwei Gröfsen nahezu gleich sind, so haben wir als erste Näherungsformel

1) $$V \neq \delta(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1}),$$

und hierbei werden nach §. 21, I die einzelnen Flächenstreifen v_0,

$v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ als Rechtecke betrachtet. Durch einzelne Beispiele von quadrirbaren Curven überzeugt man sich leicht, dafs die Formel nur dann eine erhebliche Genauigkeit bietet, wenn n sehr grofs genommen wird, und da hierin eine nicht geringe Unbequemlichkeit liegt, so entsteht die Frage, ob sich nicht Formeln aufstellen lassen, die eine raschere Annäherung gewähren d. h. schon bei mäfsigen n ein ziemlich genaues Resultat liefern.

Es erhellt nun unmittelbar, dafs man dem wahren Werthe von V näher kommen wird, wenn man die einzelnen Streifen als Trapeze ansieht, was im Grunde darauf hinausläuft, einen kleinen Bogen mit seiner Sehne zu verwechseln. Bei dieser Berechnungsweise ist

$$V \neq \delta \frac{y_0 + y_1}{2} + \delta \frac{y_1 + y_2}{2} + \delta \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots + \delta \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

oder durch Vereinigung der gleichartigen Gröfsen

2) $$V \neq \delta (\tfrac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2} y_n).$$

Ein noch genaueres Resultat läfst sich dadurch erreichen, dafs man die Bögen, welche drei aufeinanderfolgende Ordinatenendpunkte verbinden, als Parabelbögen ansieht und sich demnach die Fläche aus Streifen zusammengesetzt denkt, welche für sich betrachtet von Parabeln begrenzt werden. Zu einer für diese Voraussetzung geltende Formel gelangt man auf folgendem Wege.

Der Parameter einer gewöhnlichen Parabel sei c, die Scheiteltangente zur x-Achse und die Parabelachse zur y-Achse genommen; die Gleichung der Curve ist dann

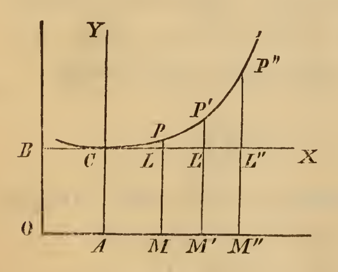
$$y = \frac{x^2}{c}$$

und die über der Abscisse x stehende Fläche

$$V = \frac{x^3}{3c}.$$

Wenden wir diefs auf die Figur an, worin CY die Parabelachse, C der Scheitel und

Fig. 11.



$$CL = x, \qquad LL' = L'L'' = \delta$$

sein möge, so haben wir

$$\text{Fläche } CLP = \frac{x^3}{3c},$$

$$\text{Fläche } CL''P'' = \frac{(x + 2\delta)^3}{3c},$$

mithin durch Subtraction der kleineren Fläche von der gröfseren

$$\text{Fl. } LL''P''P = \frac{(x + 2\delta)^3 - x^3}{3c} = \tfrac{1}{3} \delta \frac{6x^2 + 12x\delta + 8\delta^2}{c}$$

wofür man schreiben kann

$$\text{Fl. } LL''P''P = \tfrac{1}{3}\delta\left[\frac{x^2}{c} + 4\,\frac{(x+\delta)^2}{c} + \frac{(x+2\delta)^2}{c}\right].$$

Andererseits ist, wenn die Ordinaten LP, $L'P'$, $L''P''$ der Reihe nach mit y, y', y'' bezeichnet werden,

$$y = \frac{x^2}{c}, \qquad y' = \frac{(x+\delta)^2}{c}, \qquad y'' = \frac{(x+2\delta)^2}{c}$$

und vermöge dieser Gleichungen erhält die vorige Formel die elegante Gestalt

$$\text{Fl. } LL''P''P = \tfrac{1}{3}\delta\,(y + 4y' + y'').$$

Um das gewonnene Resultat zu verallgemeinern, legen wir durch einen willkürlichen Punkt O Parallelen zu OX und OY, betrachten dieselben als neue Coordinatenachsen und setzen

$$OA = a, \qquad OB = b,$$

$$OM = \xi, \qquad OM' = \xi + \delta, \qquad OM'' = \xi + 2\delta,$$

$$MP = \eta, \qquad M'P' = \eta', \qquad M''P'' = \eta''.$$

Zwischen den früheren und den jetzigen Ordinaten finden die Gleichungen statt

$$y = \eta - b, \qquad y' = \eta' - b, \qquad y'' = \eta'' - b;$$

ferner besteht die Fläche $MM''P''P$ aus dem Rechtecke $LMM''L''$ und der vorhin berechneten Fläche $LL''P''P$, mithin ist

$$\text{Fläche } MM''P''P = 2\delta b + \tfrac{1}{3}\delta\,[\eta - b + 4\,(\eta' - b) + \eta'' - b]$$

und bei gehöriger Zusammenziehung

$$\text{Fl. } MM''P''P = \tfrac{1}{3}\delta\,(\eta + 4\eta' + \eta'').$$

Man kann diese Betrachtung leicht umkehren. Sind nämlich drei Punkte P, P', P'' durch die Coordinaten ξ und η, $\xi + \delta$ und η', $\xi + 2\delta$ und η'' bestimmt, wobei alle fünf Gröfsen willkürlich bleiben, so läfst sich durch jene drei Punkte immer eine Parabel legen, deren Achse parallel zu den Ordinaten ist. Als Gleichung dieser Parabel hat man nämlich

$$Y - b = \frac{(X-a)^2}{c},$$

und da die vorstehende Gleichung richtig bleiben mufs, wenn man der Reihe nach $X = \xi$, $\xi + \delta$, $\xi + 2\delta$, $Y = \eta$, η', η'' setzt, so ergeben sich drei Bedingungsgleichungen, aus denen die Scheitelcoordinaten a und b sowie der Parameter c bestimmt werden können. Hierin liegt folgender Satz: wenn durch die Endpunkte dreier, um je δ von einander entfernter Ordinaten η, η', η'' eine Parabel gelegt wird, deren Achse den Ordinaten parallel ist, so hat die zwischen η und η'' enthaltene parabolische Fläche den Inhalt

$$\tfrac{1}{3}\delta\,(\eta + 4\eta' + \eta'').$$

Nach dieser Vorbereitung kehren wir zu der allgemeinen Aufgabe der Berechnung von V zurück. Nehmen wir für n eine gerade Zahl, so können wir die Summe von je zwei aufeinander folgenden Streifen v_0 und v_1, v_2 und v_3 u. s. w. näherungsweis als eine parabolische Fläche der vorigen Art betrachten und haben dann

$$\begin{aligned} V \neq & \tfrac{1}{3}\delta(y_0 + 4y_1 + y_2) \\ & + \tfrac{1}{3}\delta(y_2 + 4y_3 + y_4) \\ & + \tfrac{1}{3}\delta(y_4 + 4y_5 + y_6) \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + \tfrac{1}{3}\delta(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \end{aligned}$$

oder bei gehöriger Zusammenziehung

3) $$\begin{aligned} V \neq \tfrac{1}{3}\delta\,[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) \\ + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2})]. \end{aligned}$$

In der Praxis ist diese durch erhebliche Genauigkeit sich auszeichnende Formel unter dem Namen der Simpson'schen Regel bekannt.

Um ein Beispiel zu haben, bei welchem sich die Gröfse der Approximation direct beurtheilen läfst, nehmen wir

$$y = F(x) = \frac{1}{1 + x^2};$$

die über der Abscisse x stehende Fläche ist dann

$$V = x \,.\, \mathfrak{M}\, \frac{1}{1 + x^2} = arctan\ x$$

und speciell für $x = 1$ wird

$$V = \tfrac{1}{4}\pi = 0{,}78539816\ldots$$

Die einzelnen Ordinaten sind für $x = 1$

$$y_0 = 1, \qquad y_1 = \frac{1}{1 + \delta^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2},$$

$$y_2 = \frac{1}{1 + (2\delta)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2}$$

u. s. w.

oder wenn wir $n = 10$, mithin $\delta = \frac{1}{10}$ setzen,

$$\begin{array}{lll} y_0 = 1 & y_1 = 0{,}9900990, & y_2 = 0{,}9615384, \\ y_{10} = 0{,}5; & y_3 = 0{,}9174312, & y_4 = 0{,}8620690, \\ & y_5 = 0{,}8\qquad\ , & y_6 = 0{,}7352940, \\ & y_7 = 0{,}6711409, & y_8 = 0{,}6097561, \\ & y_9 = 0{,}5524861. & \end{array}$$

Zufolge dieser Werthe erhält man nach Nr. 1)

$$\begin{aligned} V & \neq \tfrac{1}{10}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_9) \\ & \neq 0{,}70998147, \end{aligned}$$

was von dem angegebenen genauen Werthe noch bedeutend abweicht. Die Formel 2) giebt

$$V \neq \tfrac{1}{10}(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_9 + \tfrac{1}{2}y_{10})$$
$$\neq 0{,}78498147,$$

wo schon eine bessere Übereinstimmung vorhanden ist. Mittelst der Simpson'schen Regel findet man

$$V \neq \tfrac{1}{30}[y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_9) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_8)]$$
$$\neq 0{,}78539813,$$

welcher Werth dem genauen Betrage sehr nahe kommt.

Capitel V.

Die unendlichen Reihen.

§. 23.

Entstehung und Eintheilung der unendlichen Reihen.

Bezeichnet $\varphi(m)$ eine gegebene Function der willkürlichen ganzen positiven Zahl m, so bilden die einzelnen Functionswerthe

$$\varphi(0), \quad \varphi(1), \quad \varphi(2), \quad \varphi(3), \ldots \varphi(n-1)$$

eine sogenannte endliche Reihe, welche im vorliegenden Falle aus n Gliedern (Termen) besteht; die Summe derselben erhält offenbar verschiedene Werthe, je nachdem man n gröfser oder kleiner nimmt, sie ist daher eine gewisse Function von n, welche $f(n)$ heifsen möge, nämlich

$$f(n) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n-1).$$

Lassen wir jetzt die Gliederanzahl n ins Unendliche wachsen, so wird die endliche Reihe zu einer unendlichen, und gleichzeitig entsteht die Frage nach dem Grenzwerthe, welchem sich $f(n)$ bei unendlich werdenden n nähert. In dieser Beziehung sind nur zwei Fälle möglich; entweder ist $Lim\, f(n)$ eine bestimmte endliche Gröfse S oder es ist keine derartige Gröfse. Im ersten Falle heifst die unendliche Reihe

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots.$$

convergent und S ihre Summe; im zweiten Falle nennt man die Reihe divergent, und selbstverständlich kann dann von einer Summe derselben nicht die Rede sein.

In dem Vorigen liegt die ursprünglichste, wenn auch nicht immer anwendbare Methode zur Summirung unendlicher Reihen; ge-

lingt es nämlich, die Summe der n ersten Reihenglieder als Function von n darzustellen, so bedarf es nur der Aufsuchung des Grenzwerthes, welchem sich diese Summe bei unendlich wachsenden n nähert. Ein paar Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

a. Für $\varphi(m) = \beta^m$ hat man folgende Gleichung

$$\frac{1-\beta^n}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \ldots + \beta^{n-1},$$

wo es auf die Bestimmung von $Lim\, \beta^n$ ankommt. Ist nun β ein positiver oder negativer echter Bruch, so wird $Lim\, \beta^n = 0$, folglich

$$\frac{1}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \ldots\ldots, \quad -1 < \beta < +1.$$

Für $\beta = +1$ ist die Summe der n-gliederigen Reihe $= n$, mithin die Summe der unendlichen Reihe $= \infty$; für $\beta > 1$ beträgt die Summe der n-gliederigen Reihe mehr als n und wächst daher um so mehr ins Unendliche. Im Falle $\beta = -1$ ist die Summe der Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots + (-1)^{n-}$$

$= 0$ oder $= +1$, jenachdem n gerade oder ungerade genommen wird, und diese Summe nähert sich bei unendlich wachsenden n keiner bestimmten Grenze; für $\beta < -1$ wächst β^n ins Unendliche und wechselt dabei fortwährend sein Zeichen. Aus diesen Bemerkungen geht hervor, dafs

$$Lim\, \frac{1-\beta^n}{1-\beta}$$

nur unter der Bedingung $-1 < \beta < +1$ einen bestimmten endlichen Werth hat; die unendliche Reihe

$$1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \ldots\ldots$$

convergirt daher einzig und allein in dem Falle eines echt gebrochenen β und hat dann $\frac{1}{1-\beta}$ zur Summe; in jedem andern Falle ist die Reihe divergent*).

---

*) Unendliche Reihen findet man zuerst angewendet von Wallis (*Arithmetica infinitorum*, 1655, I, p. 214), Mercator (*Logarithmotechnia*, Londini 1668), Gregory (*Exercitationes geometricae*, Londini 1668) und Newton (*Methodus fluxionum et serierum infinitarum;* opusc. T. I, p. 150). Der Unterschied zwischen convergirenden und divergirenden Reihen wurde bis auf Cauchy (*Cours d'Analyse algèbr.* Paris 1821) wenig beachtet, man hielt die divergirenden Reihen zwar für numerisch unbrauchbar, aber doch für analytisch richtig (vergl. Euler, *Introductio in Anal. infin.);* indessen hat auch diese Ansicht durch neuere Untersuchungen (namentlich über die Functionen complexer Variabelen) alle Berechtigung verloren.

b. Setzt man in der leicht beweisbaren identischen Gleichung

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)}-\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)}$$
$$=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2\ldots(\beta+m-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+m)}$$

nacheinander $m=1, 2, 3, \ldots (n-1)$ und addirt Alles, so erhält man

$$1)\qquad \frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}$$
$$=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left[\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n-1)}\right],$$

wobei die eingeklammerte Reihe $n-1$ Glieder zählt. Bei unendlich wachsenden n kommt es linker Hand auf den Grenzwerth von

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}$$

an, und da man augenblicklich übersieht, dafs für $\alpha=\beta$ der vorliegende Bruch constant $=1$ bleibt, so sind noch die Fälle $\alpha>\beta$ und $\alpha<\beta$ zu untersuchen, wobei α und β immer als positiv vorausgesetzt werden mögen.

Aus dem ersten Theile der Ungleichung 7) in §. 7 folgt unter der Voraussetzung $n\delta<1$

$$1-n\delta<\frac{1}{(1+\delta)^n},$$

mithin ist für $n=p$ und durch Erhebung auf die q^{te} Potenz, wobei p und q ganze positive Zahlen bedeuten mögen,

$$2)\qquad (1-p\delta)^q<\frac{1}{(1+\delta)^{pq}},\qquad p\delta<1.$$

Giebt man dem zweiten Theile derselben Ungleichung die Form

$$1+n\delta<(1+\delta)^n,$$

setzt $n=q$ und erhebt auf die p^{te} Potenz, so erhält man

$$3)\qquad (1+q\delta)^p<(1+\delta)^{pq}.$$

Das Product der Ungleichungen 2) und 3) ist

$$(1-p\delta)^q\,(1+q\delta)^p<1,\qquad p\delta<1;$$

für $\delta=\frac{z}{q}$ und durch Ausziehung der q^{ten} Wurzel folgt weiter

$$(1-\tfrac{p}{q}z)\,(1+z)^{\frac{p}{q}}<1,\qquad \tfrac{p}{q}z<1,$$

oder für $\frac{p}{q}=\mu$

4) $$(1+z)^\mu < \frac{1}{1-\mu z}, \qquad \mu z < 1,$$

wo nun μ irgend einen positiven rationalen Bruch bedeutet. Da jede irrationale Zahl als Grenzwerth eines rationalen Bruches betrachtet werden kann, dessen Zähler und Nenner unendlich wachsen, so ist leicht zu sehen, dafs die Ungleichung 4) auch für irrationale μ mithin für alle positiven μ gültig bleibt.

Nimmt man in No. 4) $z = \frac{1}{a}$ und $\mu = a - b$, so ist die Bedingung $\mu z < 1$ d. h. $\frac{a-b}{a} < 1$ immer erfüllt wenn $a > b > 0$ ist, und es wird

$$\left(\frac{a+1}{a}\right)^{a-b} < \frac{a}{b}$$

oder umgekehrt

5) $$\frac{b}{a} < \left(\frac{a}{a+1}\right)^{a-b}.$$

Sind nun α und β Gröfsen, welche der Bedingung $\alpha > \beta > 0$ genügen, so gelten nach No. 5) die Ungleichungen

$$0 < \frac{\beta}{\alpha} < \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha-\beta},$$
$$0 < \frac{\beta+1}{\alpha+1} < \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^{\alpha-\beta},$$
$$0 < \frac{\beta+2}{\alpha+2} < \left(\frac{\alpha+2}{\alpha+3}\right)^{\alpha-\beta},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0 < \frac{\beta+n-1}{\alpha+n-1} < \left(\frac{\alpha+n-1}{\alpha+n}\right)^{\alpha-\beta},$$

aus deren Multiplication entsteht

$$0 < \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)} < \left(\frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^{\alpha-\beta}.$$

Bei unendlich wachsenden n convergirt $\frac{\alpha}{\alpha+n}$ gegen die Null, und wegen des positiven Exponenten $\alpha - \beta$ nähert sich auch die rechts stehende Potenz der Grenze Null; diefs giebt

$$Lim \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)} = 0, \qquad (\alpha > \beta > 0).$$

Für $n = \alpha$ wird hiernach aus der Gleichung 1)

$$\frac{\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \ldots.$$

oder auch, wenn man beiderseits die Einheit hinzufügt und $\alpha = a - 1$ $\beta = b$ setzt,

6) $$\frac{a-1}{a-b-1}=1+\frac{b}{a}+\frac{b(b+1)}{a(a+1)}+\frac{b(b+1)(b+2)}{a(a+1)(a+2)}+\dots$$
$$a-1>b>0.$$

Der zweite Fall $\alpha<\beta$ kann sehr leicht auf den ersten zurückgeführt werden, indem man die Gleichung

$$\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}=\frac{1}{\dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}}$$

beachtet; wegen $\beta>\alpha$ nähert sich der im Nenner rechter Hand stehende Bruch der Grenze Null, der Bruch linker Hand wächst daher ins Unendliche und es wird

$$\infty=\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}+\dots.$$
$$\beta>\alpha>0.$$

ebenso auch

$$\infty=1+\frac{b}{a}+\frac{b(b+1)}{a(a+1)}+\frac{b(b+1)(b+2)}{a(a+1)(a+2)}+\dots.$$
$$b>a-1>0.$$

Unter der Voraussetzung, dafs $a-1$ und b positiv sind, convergirt oder divergirt also die Reihe

$$1+\frac{b}{a}+\frac{b(b+1)}{a(a+1)}+\frac{b(b+1)(b+2)}{a(a+1)(a+2)}+\dots,$$

jenachdem $a-1$ mehr oder weniger als b beträgt.

Der noch übrige dritte Fall $a-1=b$ oder $\alpha=\beta$ verlangt eine besondere Untersuchung, weil dann die Gleichung 1) übergeht in

$$0=0\left[\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\alpha+2}+\frac{\alpha}{\alpha+3}+\dots+\frac{\alpha}{\alpha+n-1}\right],$$

woraus sich die Summe der Reihe nicht finden läfst. Setzt man dagegen in der aus §. 17, No. 3) bekannten Ungleichung

$$l\left(\frac{1}{1-z}\right)>z>l(1+z)$$

$z=\dfrac{1}{b+m}$, so erhält man zunächst

$$l(b+m)-l(b+m-1)>\frac{1}{b+m}>l(b+m+1)-l(b+m)$$

mithin für $m=1, 2, 3, \dots (n-1)$ und durch Addition aller Ungleichungen

$$l(b+n-1)-lb$$
$$>\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{b+3}+\dots+\frac{1}{b+n-1}>$$
$$l(b+n)-l(b+1).$$

Hieraus ersieht man sofort, dafs

$$\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{b+3}+\ldots=\infty$$

wird, mithin auch

$$1+\frac{b}{b+1}+\frac{b}{b+2}+\frac{b}{b+3}+\ldots=\infty$$

ist. Die in No. 5) erwähnte Reihe divergirt demnach in dem Falle $a-1=b$ oder $a=b+1$.

§. 24.

Das Princip der Reihenvergleichung.

Die im vorigen Paragraphen benutzte Methode zur Bestimmung der Summe einer unendlichen Reihe kann nur selten angewendet werden, und es wird sich im Verlaufe unserer Untersuchungen öfter zeigen, dafs es gewöhnlich viel leichter ist, eine Summenformel für die ganze unendliche Reihe als für ihre n ersten Glieder aufzustellen. Wird nun eine unendliche Reihe gegeben und die Aufgabe ihrer Summirung gestellt, so mufs erst die Vorfrage erledigt werden, ob die gesuchte Summe überhaupt existirt, denn aufserdem liefe man Gefahr, viel Zeit und Mühe an die Auffindung einer Gröfse zu verschwenden, die sich gar nicht bestimmen läfst. Nach dem anfangs Gesagten ist jene Vorfrage meistens nicht direct beantwortbar, man mufs sich daher nach anderweiten Kennzeichen umsehen, mittelst deren die Convergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe beurtheilt werden kann.

Eine der Convergenzbedingungen ist leicht zu bemerken; sie besteht darin, dafs jedes Glied der Reihe

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad u_4,\ \ldots.$$

gröfser als sein Nachfolger sein und dafs diese Abnahme ins Unendliche fortgehen d. h. $Lim\, u_n=0$ sein mufs. Denn wären alle Glieder gröfser als eine angebbare Zahl ε, so hätte man bei positiven Gliedern

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots>\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\ldots$$

und da die Summe der rechter Hand vorkommenden Reihe jede endliche Zahl übersteigt, so findet dieselbe Eigenschaft links um so mehr statt d. h. die Reihe $u_0+u_1+u_2+$ etc. divergirt.

Obschon die genannte Bedingung nothwendig ist, so erweist sie sich, wenigstens bei durchaus positiven Gliedern, doch nicht als hinreichend, wie man leicht an Beispielen sehen kann. Für

$$u_0=0,\qquad u_1=\frac{1}{\sqrt{1}},\qquad u_2=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad u_3=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ldots.$$

ist zwar

$$Lim\, u_n = Lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

aber gleichwohl divergirt die unendliche Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots.$$

Denn bezeichnen wir mit S_n die Summe ihrer n ersten Glieder, so ist

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots. + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots. + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d. h.

$$S_n > n \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{oder} \quad S_n > \sqrt{n},$$

woraus $Lim\, S_n = \infty$, also die Divergenz der genannten Reihe folgt.

Ein zweites Beispiel der Art bietet die sogenannte harmonische Reihe

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \dots.$$

Zufolge der Ungleichung 6) im vorigen Paragraphen liegt nämlich die Summe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

zwischen ln und $l(n+1) - l2$, und daraus erhellt sofort die Divergenz der erwähnten Reihe.

Erscheinungen dieser Art weisen darauf hin, dafs es zur Convergenz solcher Reihen, die nur positive Glieder enthalten, noch anderer Bedingungen bedarf als der unendlichen Abnahme der Reihenglieder. Um diese Bedingungen zu entwickeln, benutzen wir das folgende unmittelbar klare Princip: „wenn die beiden Reihen

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots$$

und

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

aus nur positiven Gliedern bestehen und man schon weifs, dafs die erste derselben convergirt, so convergirt die zweite ebenfalls und zwar stärker, wenn

$$u_0 < t_0, \qquad u_1 < t_1, \qquad u_2 < t_2 \quad \text{etc.}$$

divergirt dagegen die erste, so ist diefs um so mehr mit der zweiten der Fall, wenn die Ungleichungen

$$u_0 > t_0, \qquad u_1 > t_1, \qquad u_2 > t_2 \quad \text{etc.}$$

stattfinden.“ So erkennt man z. B. augenblicklich die Convergenz der Reihe

$$\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots$$

weil ihre Glieder kleiner sind als die der folgenden

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$$

welche convergirt und die Einheit zur Summe hat.

Das soeben aufgestellte Princip ist noch einer Erweiterung fähig, wenn man bemerkt, dafs eine convergente unendliche Reihe und eine endliche Reihe zusammen wieder eine convergente Reihe bilden, und dafs ebenso eine divergente Reihe mit einer endlichen Reihe vereinigt eine divergente Reihe giebt. Wäre nämlich, wenn auch nicht von Anfang an, $u_0 < t_0$, $u_1 < t_1$ etc., so doch, wenigstens von einer bestimmten angebbaren Stelle an,

$$u_k < t_k, \quad u_{k+1} < t_{k+1}, \quad u_{k+2} < t_{k+2}, \ldots$$

so convergirt die Reihe

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots$$

wenn dasselbe mit der Reihe

$$t_k + t_{k+1} + t_{k+2} + \cdots$$

der Fall ist, und wenn man die endliche Summe von $u_k + u_{k+1} +$ etc. mit der endlichen Reihe $u_0 + u_1 + \ldots u_{k-1}$ vereinigt, so folgt, dafs jetzt auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{k-1} + u_k + u_{k+1} + \cdots$$

convergent ist. Ebenso leicht kann man sich überzeugen, dafs diese Reihe divergirt, wenn von einer gewissen Stelle an $u_k > t_k$, $u_{k+1} > t_{k+1}$ etc. und die Reihe $t_k + t_{k+1} +$ etc. eine divergente ist.

Zu einer anderen für die Anwendung bequemeren Ausdrucksweise dieses Principes der Reihenvergleichung gelangt man durch folgende Schlüsse. Es sei

1) $$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \lambda_1, \quad \frac{t_{k+2}}{t_{k+1}} = \lambda_2, \quad \frac{t_{k+3}}{t_{k+2}} = \lambda_3, \ldots$$

so findet man sehr leicht

$$t_{k+1} = t_k \cdot \lambda_1$$
$$t_{k+2} = t_{k+1} \cdot \lambda_2 = t_k \cdot \lambda_1\lambda_2$$
$$t_{k+3} = t_{k+2} \cdot \lambda_3 = t_k \cdot \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

u. s. w.

mithin

2) $$t_k + t_{k+1} + t_{k+2} + t_{k+3} + \cdots$$
$$= t_k(1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \ldots)$$

Bezeichnet man entsprechend wie folgt

3) $$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \mu_1, \quad \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} = \mu_2, \quad \frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} = \mu_3, \ldots$$

so ergiebt sich durch dieselben Schlüsse wie vorhin

4) $$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots$$
$$= u_k (1 + \mu_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_2\mu_3 + \cdots)$$

Wenn nun zwischen den mit μ und λ bezeichneten Quotienten folgende Beziehungen stattfinden:

5) $$\mu_1 < \lambda_1, \quad \mu_2 < \lambda_2, \quad \mu_3 < \lambda_3, \ldots$$

so ist auch $\mu_1\mu_2 < \lambda_1\lambda_2$, $\mu_1\mu_2\mu_3 < \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ u. s. f., ferner

$$1 + \mu_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_2\mu_3 + \cdots$$
$$< 1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \cdots$$

d. i. vermöge der Gleichungen 2) und 4)

$$\frac{1}{u_k}(u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots)$$
$$< \frac{1}{t_k}(t_k + t_{k+1} + t_{k+2} + t_{k+3} + \cdots)$$

oder durch beiderseitige Multiplication mit u_k

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots$$
$$< \frac{u_k}{t_k}(t_k + t_{k+1} + t_{k+2} + t_{k+3} + \cdots)$$

Im Fall die Reihe $t_0 + t_1 + t_2 +$ etc. convergirt, ist die Summe von $t_k + t_{k+1} + t_{k+2} +$ etc. eine endliche Gröfse, und da jetzt rechter Hand in der obigen Ungleichung eine endliche Gröfse steht, so mufs die Summe von $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} +$ etc. ebenfalls endlich sein; dasselbe gilt dann auch von der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$, welche also unter den gemachten Voraussetzungen convergirt. Setzt man für die Gröfsen λ und μ ihre Werthe aus 1) und 3), so gehen die Ungleichungen 5) in die folgenden über:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \frac{t_{k+1}}{t_k}, \quad \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < \frac{t_{k+2}}{t_{k+1}}, \quad \text{etc.}$$

und es läfst sich nunmehr folgendes Theorem aufstellen:

Aus der Convergenz der Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots$$

folgt die Convergenz der anderweiten Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

sobald der Quotient $u_{n+1} : u_n$ von irgend einer bestimmten Stelle an kleiner bleibt als der entsprechende Quotient $t_{n+1} : t_n$.

Durch ganz ähnliche Schlüsse wie vorhin überzeugt man sich von der Richtigkeit des analogen Satzes:

Aus der Divergenz der Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots$$

folgt die Divergenz der anderweiten Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

sobald der Quotient $u_{n+1} : u_n$ von irgend einer bestimmten Stelle an gröſser bleibt als der entsprechende Qnotient $t_{n+1} : t_n$.

Von diesem wichtigen Doppelsatze wollen wir nun die hauptsächlichsten Anwendungen vornehmen; sie bestehen darin, daſs wir die gegebene Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

mit solchen Reihen vergleichen, deren Convergenz oder Divergenz bereits entschieden ist.

§. 25.

Vergleichung einer beliebigen Reihe mit der geometrischen Progression.

Von derjenigen Reihe, welche entsteht, wenn man eine geometrische Progression ins Unendliche fortsetzt, nämlich

1) $$1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \cdots .$$

kennen wir nach §. 23 die Bedingungen der Convergenz oder Divergenz; jene findet für $\beta < 1$, diese für $\beta \geqq 1$ statt. Wenden wir das am Ende des vorigen Paragraphen entwickelte Theorem hier an, indem wir die Reihe 1) an die Stelle der dortigen Reihe $t_0 + t_1 + t_2 +$ etc. setzen, so ist $t_{n+1} : t_n = \beta^{n+1} : \beta^n = \beta$, mithin convergirt die Reihe

2) $$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots .$$

sobald von einer bestimmten Stelle an die Ungleichung

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \beta$$

stattfindet und zugleich die Reihe 1) convergirt d. h. $\beta < 1$ ist; die Convergenz der Reihe 2) wird also durch die Bedingung

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$$

bestimmt. Auf ganz analoge Weise ergiebt sich, daſs die Ungleichung

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$$

für die Divergenz der Reihe entscheidend ist. Die Reihe 2) convergirt oder divergirt also, jenachdem der Quotient $u_{n+1} : u_n$ von einer bestimmten Stelle $n = k$ an kleiner oder gröſser als die Einheit bleibt.

Zu einer für die Anwendung bequemeren Ausdrucksweise dieses Satzes führt folgende Bemerkung. Es heiſse α der Grenzwerth, wel-

chem sich der Quotient $u_{n+1} : u_n$ bei unendlich wachsenden n nähert, d. h. es sei

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha;$$

wir unterscheiden dann die beiden Fälle $\alpha < 1$ und $\alpha > 1$. Wenn $\alpha < 1$ ist, so denke man sich zwischen α und 1 den beliebigen echten Bruch β eingeschaltet ($\alpha < \beta < 1$); der Quotient $u_{n+1} : u_n$ nähert sich dann einer Grenze, welche unter β liegt, und diefs ist auf keine andere Weise möglich, als dafs jener Quotient von irgend einer Stelle $n = k$ an kleiner wird und kleiner bleibt als β. Die Bedingung $(u_{k+1} : u_k) < \beta < 1$ kann also durch die Bedingung $\alpha < 1$ vertreten werden. Im Falle $\alpha > 1$ denken wir uns zwischen 1 und α den unechten Bruch β eingeschaltet ($\alpha > \beta > 1$); der Quotient $u_{n+1} : u_n$ nähert sich dann einer über β liegenden Grenze und mufs folglich von einer bestimmten Stelle $n = k$ an gröfser als β bleiben; die Bedingung $(u_{k+1} : u_k) > \beta > 1$ kann mithin durch $\alpha > 1$ ersetzt werden. Diefs zusammen giebt den Satz:

Die unendliche, aus nur positiven Gliedern bestehende Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots.$$

convergirt oder divergirt, jenachdem

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

weniger oder mehr als die Einheit beträgt.

Einige Anwendungen dieses Theorems sind folgende.

a. Die gegebene Reihe sei

$$3) \quad 1 + \frac{p}{1} x + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{p(p+1)(p+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots,$$

wobei p und x als positive endliche Gröfsen betrachtet werden; man hat dann

$$u_n = \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n, \quad u_{n+1} = \frac{p(p+1)\dots(p+n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} x^{n+1},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{p+n}{n+1} x = \left(1 + \frac{p-1}{n+1}\right) x,$$

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = x,$$

mithin convergirt die Reihe für $x < 1$ und divergirt für $x > 1$.

b. Es sei ferner, x als positiv vorausgesetzt, die Reihe

$$4) \quad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots.$$

zu untersuchen. Hier ist

$$u_n = \frac{x^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}, \qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n+1)},$$

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim \frac{x}{n+1} = 0;$$

die Reihe convergirt demnach für jedes endliche bestimmte x. Es ist nicht überflüssig, sich hiervon direct zu überzeugen, weil es für den ersten Anblick scheinen könnte, als divergirte die Reihe bei einigermaaſsen groſsen x, wie z. B. für $x = 10$, wobei sie zur folgenden wird

$$1 + 10 + 50 + \frac{500}{3} + \ldots;$$

daſs hier trotz der anfänglichen Zunahme der Reihenglieder später doch wieder Convergenz eintritt, kann man auf folgende Weise sehen.

Aus der für $a > b$ geltenden Ungleichung

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} < ma^{m-1} \quad \text{oder} \quad [a - m(a-b)]\, a^{m-1} < b^m$$

ergiebt sich für $a = m + 1$, $b = m$

$$(m+1)^{m-1} < m^m$$

oder

$$\frac{(m+1)^{m+1}}{m^m} < (m+1)^2;$$

setzt man $m = 1, 2, 3, \ldots (k-1)$ und multiplicirt alle entstehenden Ungleichungen, so folgt

$$k^k < 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 4^2 \ldots k^2$$

und

$$\frac{x^k}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots k} < \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k.$$

Die willkürliche ganz positive Zahl k wählen wir so, daſs $\sqrt{k} > x$ oder $k > x^2$ ist, und zerlegen die ursprünglich gegebene Reihe folgendermaaſsen

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \ldots + \frac{x^{k-1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (k-1)}$$
$$+ \frac{x^k}{1 \,.\, 2 \ldots k} + \frac{x^{k+1}}{1 \,.\, 2 \ldots (k+1)} + \frac{x^{k+2}}{1 \,.\, 2 \ldots (k+2)} + \ldots;$$

der erste Theil ist eine endliche Reihe und hat eine endliche Summe; der zweite Theil beträgt weniger als

$$\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k + \left(\frac{x}{\sqrt{k+1}}\right)^{k+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{k+2}}\right)^{k+2} + \ldots$$
$$< \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k + \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^{k+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^{k+2} + \ldots$$

d. h. weniger als die Summe einer geometrischen Progression, die nach Potenzen des echten Bruches $\frac{x}{\sqrt{k}}$ fortschreitet. Die Reihe 4) convergirt also von der Stelle $k > x^2$ an stärker als eine geometrische Progression.

c. Die gegebene Reihe sei

$$5)\qquad 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+2y)^2}{1\,.\,2} + \frac{(x+3y)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots,$$

wobei x und y als positive endliche Gröfsen vorausgesetzt werden. Hier ist

$$u_n = \frac{(x+ny)^n}{1\,.\,2\,...\,n}, \qquad u_{n+1} = \frac{(x+[n+1]\,y)^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,(n+1)},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(x+ny+y)^{n+1}}{(n+1)\,(x+ny)^n} = \left(\frac{x}{n+1}+y\right)\left(1+\frac{y}{x+ny}\right)^n;$$

im zweiten Factor setzen wir

$$n + \frac{x}{y} = \omega \quad \text{also} \quad n = \omega - \frac{x}{y},$$

und erhalten

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{x}{n+1}+y\right)\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]^{1-\frac{x}{y\omega}}$$

mithin durch Übergang zur Grenze für gleichzeitig ins Unendliche wachsende n und ω

$$Lim\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = ye.$$

Demnach convergirt oder divergirt die Reihe 5), jenachdem y weniger oder mehr als $\frac{1}{e}$ beträgt.

d. In der Reihe

$$6)\qquad 1 + 1x + 1\,.\,2x^2 + 1\,.\,2\,.\,3x^3 + 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4x^4 + \ldots.$$

ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\,x,$$

und der Grenzwerth hiervon wird unendlich für jedes von Null verschiedene x. Wenn also die Reihe existirt, so divergirt sie auch und zwar stärker als eine geometrische Progression; denn nach dem Früheren ist

$$1\,.\,2\,.\,3\,...\,kx^k > (x\sqrt{k})^k,$$

und sobald $x\sqrt{k}$ gröfser als die Einheit geworden ist, divergirt die Reihe stärker als die folgende

$$(x\sqrt{k})^k + (x\sqrt{k})^{k+1} + (x\sqrt{k})^{k+2} + \ldots,$$

wovon man sich durch eine ähnliche Betrachtung wie bei dem zweiten Beispiele leicht überzeugen wird.

Die vorigen Anwendungen lassen erkennen, dafs die aufgestellte Regel zu einer sicheren Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz einer gegebenen Reihe führt, sobald $Lim\,(u_{n+1}:u_n)$ weniger oder mehr als die Einheit beträgt. In dem Falle $Lim\,(u_{n+1}:u_n)=1$ hört dagegen die Anwendbarkeit des Theoremes auf, denn der Nerv seines Beweises liegt darin, dafs von einer bestimmten Stelle $n=k$ ab der Quotient $u_{n+1}:u_n$ kleiner oder gröfser als die Einheit bleiben mufs; diese Voraussetzung findet nicht mehr statt, wenn jener Quotient die Einheit selber zur Grenze hat, und es kann daher im letzteren Falle die Reihe ebensowohl convergiren als divergiren. Hierdurch sind wir genöthigt, uns nach weiteren Kennzeichen der Convergenz und Divergenz umzusehen.

§. 26.

Simultane Convergenz und Divergenz zweier Reihen.

I. Unter der Voraussetzung, dafs alle Glieder der Reihe

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots$$

positiv sind und dafs die Ungleichungen $u_1>u_2>u_3>u_4$ u. s. w. stattfinden, gelten folgende einfache Beziehungen

$$\begin{aligned}
2u_2 &> u_2+u_3 > 2u_4,\\
4u_4 &> u_4+u_5+u_6+u_7 > 4u_8,\\
8u_8 &> u_8+u_9+\cdots+u_{15} > 8u_{16},\\
16u_{16} &> u_{16}+u_{17}+\cdots+u_{31} > 16u_{32},
\end{aligned}$$

deren Fortgang leicht zu übersehen ist. Addirt man dieselben und fügt allerseits u_1 hinzu, so erhält man die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&u_1+2u_2+4u_4+8u_8+\cdots\\
&>u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\cdots>\\
&u_1+2u_4+4u_8+8u_{16}+\cdots,
\end{aligned}$$

die sich mittelst der Abkürzungen

$$\begin{aligned}
u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots&=S\\
u_1+2u_2+4u_4+8u_8+\cdots&=T
\end{aligned}$$

in folgender Form darstellen läfst

1) $$T>S>\tfrac{1}{2}u_1-u_2+\tfrac{1}{2}T.$$

Wenn nun die Reihe T convergirt, so ist T eine endliche Gröfse; es liegt dann S zwischen zwei endlichen Gröfsen und hat daher einen endlichen Werth, woraus die Convergenz von S folgt. Wenn dagegen die Reihe T divergirt, so ist $T=\infty$, $S>\frac{1}{2}u_1-u_2+\frac{1}{2}\infty$ mithin

um so mehr $S = \infty$, was die Divergenz von S beweist. Aus der Convergenz oder Divergenz von T kann man hiernach die Convergenz oder Divergenz von S erkennen.

Diese Schlüsse lassen sich leicht umkehren, wenn man die Beziehung 1) in der umgekehrten Form darstellt

2) $$2(S + u_2) - u_1 > T > S;$$

der Convergenz von S entspricht dann die Convergenz von T, der Divergenz von S die Divergenz von T.

Diese Resultate kann man in folgenden Satz zusammenfassen:

Die beiden unendlichen Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots$$

und

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \dots$$

convergiren oder divergiren immer gleichzeitig.

Um also die ursprüngliche Reihe auf ihre Convergenz oder Divergenz zu prüfen, braucht man nur die abgeleitete Reihe zu untersuchen; die Bedingungen für diese gelten zugleich für jene.

Eine bemerkenswerthe Anwendung hiervon ist folgende. Es sei

$$u_1 = \frac{1}{1^\mu}, \quad u_2 = \frac{1}{2^\mu}, \quad u_3 = \frac{1}{3^\mu}, \text{ u. s. f.}$$

so sind die beiden in Rede stehenden Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$
$$= \frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \dots$$

und

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \dots$$
$$= 1 + 2^{1-\mu} + 4^{1-\mu} + 8^{1-\mu} + 16^{1-\mu} + \dots$$

Giebt man der letzteren die Form

$$1 + 2^{1-\mu} + (2^{1-\mu})^2 + (2^{1-\mu})^3 + \dots$$

so erkennt man in ihr eine geometrische Progression; zur Convergenz derselben ist nöthig, dafs

$$2^{1-\mu} = \frac{2^1}{2^\mu} < 1, \quad \text{d. h.} \quad \mu > 1$$

sei; in jedem andern Falle divergirt sie. Nach dem obigen Theoreme ist nun auch die Reihe

3) $$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \dots$$

---

*) Cauchy, *Cours d'Analyse algébrique* p. 153.

convergent für $\mu > 1$ und divergent für $\mu \leqq 1$. Hieraus erkennt man z. B., dafs von den vier Reihen

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\frac{1}{1\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots$$

die beiden ersten convergiren, die übrigen dagegen divergiren, während bei allen $Lim\,(u_{n+1} : u_n) = 1$ ist.

Als zweites Beispiel nehmen wir die Reihe, welche entsteht, wenn

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = \frac{1}{2\,(L2)^\mu}, \qquad u_3 = \frac{1}{3\,(L3)^\mu}, \; \cdots$$

gesetzt wird, wobei die Basis der mit L bezeichneten Logarithmen die Zahl 2 sein möge, mithin $L2 = 1$, $L4 = 2$, $L8 = 3$ u. s. w.; die beiden in dem allgemeinen Theoreme vorkommenden Reihen sind jetzt

4) $$\frac{1}{2\,(L2)^\mu} + \frac{1}{3\,(L3)^\mu} + \frac{1}{4\,(L4)^\mu} + \frac{1}{5\,(L5)^\mu} + \cdots$$

und

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \cdots.$$

Die letztere Reihe ist mit der in No. 3) untersuchten identisch, mithin convergiren und divergiren 3) und 4) unter ganz gleichen Bedingungen.

Für ein drittes Beispiel sei

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \qquad u_4 = \frac{1}{4L4(LL4)^\mu}, \qquad u_5 = \frac{1}{5\,L5\,(LL5)^\mu}, \; \cdots;$$

die beiden zu vergleichenden Reihen sind in diesem Falle

5) $$\frac{1}{4\,L4\,(LL4)^\mu} + \frac{1}{5\,L5\,(LL5)^\mu} + \frac{1}{6\,L6\,(LL6)^\mu} + \cdots.$$

und

$$\frac{1}{2\,(L2)^\mu} + \frac{1}{3\,(L3)^\mu} + \frac{1}{4\,(L4)^\mu} + \cdots.$$

deren letzte mit No. 4) zusammenfällt. Die Reihe 5) convergirt und divergirt daher gleichzeitig mit den Reihen 4) und 3).

Nimmt man für ein weiteres Beispiel

$$u_1 = u_2 = u_3 \ldots = u_7 = 0,$$

$$u_8 = \frac{1}{8\,L8\,LL8\,(LLL8)^\mu}, \quad u_9 = \frac{1}{9\,L9\,LL9\,(LLL9)^\mu}, \; \cdots.$$

so wird die abgeleitete Reihe identisch mit No. 5) und daher gelten für die Reihe $u_7 + u_8 +$ etc. die nämlichen Bedingungen der Convergenz und Divergenz wie für die Reihen 5), 4) und 3). Durch Fortsetzung dieser Schlüsse gelangt man überhaupt zu dem Satze, dafs die Reihen

$$\frac{1}{1^{1+\beta}} + \frac{1}{2^{1+\beta}} + \frac{1}{3^{1+\beta}} + \frac{1}{4^{1+\beta}} + \dots$$

$$\frac{1}{2(L2)^{1+\beta}} + \frac{1}{3(L3)^{1+\beta}} + \frac{1}{4(L4)^{1+\beta}} + \dots,$$

$$\frac{1}{4L4(LL4)^{1+\beta}} + \frac{1}{5L5(LL5)^{1+\beta}} + \frac{1}{6L6(LL6)^{1+\beta}} + \dots,$$

u. s. w.

für jedes positive, die Null übersteigende β gleichzeitig convergiren, dagegen für jedes andere β gleichzeitig divergiren.

II. Zu einer anderen Reihe, welche unter denselben Umständen convergirt oder divergirt wie die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ gelangt man auf folgendem Wege.

Wegen $u_1 > u_2 > u_3$ u. s. w. gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 3u_1 &> u_1 + u_2 + u_3 > 3u_4, \\ 5u_4 &> u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 > 5u_9, \\ 7u_9 &> u_9 + u_{10} + \dots\dots + u_{15} > 7u_{16}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

deren Addition giebt

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} &3u_1 + 5u_4 + 7u_9 + 9u_{16} + \dots \\ &> u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots > \\ &3u_4 + 5u_9 + 7u_{16} + 9u_{25} + \dots \end{aligned}\right.$$

Setzt man wie früher $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = S$, ferner

$$1u_1 + 2u_4 + 3u_9 + 4u_{16} + \dots = Q,$$

$$u_1 + u_4 + u_9 + u_{16} + \dots = R,$$

so kann man die Ungleichung 6) in nachstehender Form darstellen

$$7)\quad 2Q + R > S > 2Q - R - u_1$$

und daran folgende Schlüsse knüpfen. Convergirt die Reihe Q, so convergirt die aus kleineren Summanden bestehende Reihe R um so mehr, also sind Q und R gleichzeitig endliche Gröfsen, und die Reihe S convergirt, weil ihre Summe (nach No. 7) zwischen zwei endlichen Zahlen liegt. Divergirt die Reihe Q, so divergirt um so mehr die aus gröfseren Gliedern bestehende Reihe $3u_4 + 5u_9 + 7u_{16} + \dots$, und nach dem zweiten Theile der Ungleichung 6) divergirt dann auch die Reihe S.

Wenn umgekehrt die Reihe S convergirt, so gilt dasselbe von

der Reihe R, weil diese nicht alle in S vorkommenden Glieder enthält; nach No. 7) ist aber

$$\tfrac{1}{2}(S + R + u_1) > Q > \tfrac{1}{2}(S - R)$$

mithin convergirt auch die Reihe Q. Falls endlich die Reihe S divergirt, hat man wegen $Q > R$, die Ungleichung $3Q > 2Q + R$ d. i. nach dem ersten Theile von No. 7) $3Q > S$ oder $Q > \frac{1}{3}S$, was die Divergenz von Q beweist.

Nach allen diesen Bemerkungen gilt der Satz

Die beiden unendlichen Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots$$

und

$$1u_1 + 2u_4 + 3u_9 + 4u_{16} + \dots.$$

convergiren oder divergiren immer gleichzeitig.

Beispielsweis ergiebt sich hieraus und unter Benutzung des in §. 25 angegebenen Kriteriums, dafs die Reihe

$$x^{\sqrt{1}} + x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{3}} + x^{\sqrt{4}} + \dots.$$

für positive $x < 1$ convergirt und für $x \geqq 1$ divergirt.

§. 27.

Fernere Reihenvergleichungen.

Nachdem wir durch die vorigen Betrachtungen zu neuen Reihen gelangt sind, für welche die Bedingungen der Convergenz oder Divergenz feststehen, können wir wieder das in §. 24 auseinander gesetzte Princip der Reihenvergleichung benutzen, indem wir statt der Reihe $t_0 + t_1 + t_2 +$ etc. die eine oder andere jener neuen Reihen nehmen. Vergleichen wir z. B. die Reihe

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \dots.$$

mit der allgemeinen Reihe

1) $$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots,$$

so folgt aus §. 24 unmittelbar, dafs die vorliegende Reihe convergirt, wenn von einer bestimmten Stelle an

2) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu \text{ und zugleich } \mu > 1$$

ist, dafs hingegen die Reihe 2) divergirt, wenn von einer bestimmten Stelle an

3) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu \text{ und zugleich } \mu < 1$$

ist. Zu einer bequemeren Form dieser Regel gelangt man durch folgende Betrachtungen.

Für unendlich wachsende n sei

4) $$Lim \left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right]=\lambda,$$

so können, wenn nicht gerade $\lambda = 1$ ist, die Fälle $\lambda > 1$ und $\lambda < 1$ unterschieden werden. Unter der Voraussetzung $\lambda > 1$ denken wir uns zwischen 1 und λ eine beliebige Zahl μ eingeschaltet, so dafs $\lambda > \mu > 1$ ist, und betrachten μ als den Grenzwerth, welchem sich das Product

$$n\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}\right]$$

bei unendlich wachsenden n nähert (§. 9 Formel 2). Statt der Ungleichung $\lambda > \mu$ haben wir jetzt die folgende

$$Lim\left\{n\left(1-\frac{u_{n+1}}{n_n}\right)\right\} > Lim\left\{n\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}\right]\right\}$$

und daraus geht hervor, dafs von einer bestimmten Stelle an

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > n\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}\right]$$

sein mufs, weil sonst das erste Product sich nicht einer Grenze nähern könnte, welche vorausgesetztermaafsen mehr beträgt als der Grenzwerth des zweiten Productes. Die so eben erhaltene Ungleichung liefert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}$$

während gleichzeitig $\mu > 1$ ist; die in No. 2) verlangten Bedingungen sind also erfüllt, wenn $\lambda > 1$ ist und μ willkürlich zwischen λ und 1 gewählt wird.

Im zweiten Falle $\lambda > 1$ schalten wir wiederum μ zwischen λ und 1 ein, es ist dann $\lambda < \mu < 1$. Ferner denken wir uns μ auf dieselbe Weise wie vorhin als Grenzwerth, so dafs die Ungleichung $\lambda < \mu$ durch

$$Lim\left\{n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right\} < Lim\left\{n\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}\right]\right\}$$

ersetzt werden kann. Bei hinreichend grofsen n mufs hiernach

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < n\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}\right]$$

sein, woraus folgt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu},$$

während gleichzeitig $\mu < 1$ ist; die in No. 3) aufgestellten Bedin-

gungen sind demnach erfüllt, wenn λ weniger als die Einheit beträgt. Diefs Alles zusammen giebt folgenden Satz*):

Die unendliche, nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

convergirt oder divergirt, jenachdem der Ausdruck

$$Lim\left[n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right]$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

In Verbindung mit dem Theoreme des §. 25 reicht der obige Satz meistens aus, um die Convergenz und Divergenz einer Reihe vollständig zu entscheiden; einige Beispiele werden diefs zeigen.

Die gegebene Reihe sei

$$5)\qquad \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots,$$

man hat dann, wenn u_0 für Null gerechnet wird,

$$u_n = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-3)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$u_{n+1} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-3)\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n-2)\,(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\,x^2 = \frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2}{1+\frac{1}{2n}}\,x^2;$$

der Grenzwerth hiervon ist x^2, mithin convergirt oder divergirt die Reihe 5), jenachdem der absolute Werth von x ein echter oder ein unechter Bruch ist. Um den noch übrigen Fall $x^2 = 1$ zu erledigen, berechnen wir das Product

$$n\left[1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] = n\left[1 - \frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2}{1+\frac{1}{2n}}\right] = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{4n}}{1+\frac{1}{2n}};$$

der Grenzwerth desselben ist $\frac{3}{2} > 1$, mithin findet auch für $x^2 = 1$ die Convergenz noch statt.

Als zweites Beispiel diene die sogenannte hypergeometrische Reihe

$$6)\qquad 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\;\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)\;(\alpha+2)\;\beta(\beta+1)\;(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\gamma(\gamma+1)\;(\gamma+2)}x^3 + \ldots$$

---

*) Unter einer etwas anderen Form wurde derselbe von J. Raabe aufgestellt in der „Zeitschr. für Phys. u. Mathem. von Baumgartner u. Ettingshausen“; Bd. X, S. 63.

worin α, β, γ, x positiv sein mögen. Hier ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(n+1)(\gamma + n)} x = \frac{\left(\frac{\alpha}{n} + 1\right)\left(\frac{\beta}{n} + 1\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{\gamma}{n} + 1\right)} x$$

und der Grenzwerth hiervon $= x$; die Reihe convergirt also für $x < 1$ und divergirt für $x > 1$. Für den Fall $x = 1$ hat man

$$n\left[1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] = \frac{\gamma + 1 - \alpha - \beta + \frac{\gamma - \alpha\beta}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)}$$

und als Grenzwerth hiervon $\gamma + 1 - \alpha - \beta$, welcher Ausdruck die Einheit übersteigt, wenn $\gamma > \alpha + \beta$ ist; unter dieser Bedingung convergirt die Reihe 6) auch für $x = 1$.

An diese Beispiele knüpft sich noch eine allgemeine Bemerkung. Im Falle $x = 1$ besteht nämlich das Verhältnifs $u_{n+1} : u_n$ aus einem Bruche, dessen Zähler und Nenner nach Potenzen von n geordnet werden können; so war im ersten Beispiele

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 - n + \frac{1}{4}}{n^2 + \frac{1}{2}n},$$

im zweiten

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 + (\alpha + \beta) n + \alpha\beta}{n^2 + (\gamma + 1) n + \gamma},$$

und es kann sich überhaupt treffen, dafs jenes Verhältnifs die Form

7) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^k + A' n^{k-1} + B' n^{k-2} + \dots}{n^k + A n^{k-1} + B n^{k-2} + \dots}$$

annimmt, wobei k eine constante ganze positive Zahl, A, B, $C \dots$, A', B', C', ... irgend welche Constanten bezeichnen. Unter dieser Voraussetzung ist

$$n\left[1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] = \frac{(A - A')n^k + (B - B')n^{k-1} + (C - C')n^{k-2} + \dots}{n^k + A n^{k-1} + B n^{k-2} + \dots}$$

$$= \frac{A - A' + \frac{B - B'}{n} + \frac{C - C'}{n^2} + \dots}{1 + \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \dots}$$

mithin

$$Lim \left\{ n\left[1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] \right\} = A - A'.$$

Hiernach ergiebt sich folgende Regel: wenn das Verhältnifs $u_{n+1} : u_n$ auf die in No. 7) erwähnte Form gebracht werden kann, so conver-

girt oder divergirt die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc., jenachdem $A - A'$ mehr oder weniger als die Einheit beträgt*).

Wir kehren noch einmal zu der anfänglichen Reihenvergleichung zurück, um zu zeigen, dafs man den unter No 2) und 3) ausgesprochenen Bedingungen auch auf andere Weise genügen kann.

Setzen wir

$$8) \qquad Lim\left[n\, l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right] = \varkappa,$$

so lassen sich, wenn nicht gerade $\varkappa = 1$ ist, die beiden Fälle $\varkappa > 1$ und $\varkappa < 1$ unterscheiden. Unter der Voraussetzung $\varkappa > 1$ denken wir uns zwischen 1 und $\varkappa$ die beliebige positive Zahl μ eingeschaltet, so dafs $\varkappa > \mu > 1$ ist, und betrachten μ als den Grenzwerth, welchem sich das Product

$$\mu\, l\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$$

bei unendlich wachsenden n nähert. Statt der Ungleichung $\varkappa > \mu$ haben wir jetzt die folgende

$$Lim\left[n\, l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right] > Lim\left\{\mu\, l\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]\right\},$$

und daraus geht hervor, dafs von einer bestimmten Stelle an

$$n\, l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) > \mu\, l\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$$

sein mufs, weil sonst das erste Product sich nicht einer Grenze nähern hönnte, welche vorausgesetztermaafsen mehr beträgt als der Grenzwerth des zweiten Productes. Die erhaltene Ungleichung giebt

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\mu \quad \text{oder} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu$$

während zugleich $\mu > 1$ ist; die in No. 2) verlangten Bedingungen sind demnach erfüllt, wenn $\varkappa > 1$ ist und μ willkürlich zwischen $\varkappa$ und 1 gewählt wird. Ganz ähnliche Betrachtungen gelten für den Fall $\varkappa < 1$; man schaltet wiederum μ zwischen 1 und $\varkappa$ ein, betrachtet μ als denselben Grenzwerth wie vorhin und gelangt zu dem Schlusse, dafs von einer bestimmten Stelle an

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu$$

bleiben mufs, während $\mu < 1$ ist. Die Bedingungen 3) sind demnach erfüllt, wenn $\varkappa$ weniger als die Einheit ausmacht. Man hat daher den Satz**):

---

*) Vergl. die Abhandl. v. Gaufs: *Disquisitiones circa seriem infinitam* etc. in den *Commentat. Gotting. rec.* T. II, a. 1812.

**) Vom Verf. angegeben.

Die unendliche, nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

convergirt oder divergirt, jenachdem

$$Lim\left[n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right]$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

Als Beispiel möge die unendliche Reihe

9) $$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+2y)^2}{1\,.\,2} + \frac{(x+3y)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \dots$$

dienen, von welcher bereits in §. 25 nachgewiesen wurde, dafs sie für $y < \frac{1}{e}$ convergirt, für $y > \frac{1}{e}$ divergirt, und wobei der noch übrige Fall $y = \frac{1}{e}$ unerledigt blieb. Unter dieser Voraussetzung ist

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)\left(x+\frac{n}{e}\right)^n}{\left(x+\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} = \frac{e}{\left(1+\frac{ex}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+ex}\right)^n}$$

$$n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = n - n\,l\left(1+\frac{ex}{n+1}\right) - n^2\,l\left(1+\frac{1}{n+ex}\right);$$

um diesen Ausdruck weiter zu entwickeln, benutzen wir die in §. 17 unter No. 10) bewiesene Formel

$$l(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}\varrho z^3, \qquad 0 < \varrho < 1,$$

indem wir das eine Mal

$$z = \frac{ex}{n+1}, \qquad \tfrac{1}{3}\varrho = \varrho',$$

das andere Mal

$$z = \frac{1}{n+ex}, \qquad \tfrac{1}{3}\varrho = \varrho'',$$

setzen. Nach gehöriger Zusammenrechnung erhalten wir

$$n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \frac{nex\,(1-ex)}{(n+1)\,(n+ex)} + \tfrac{1}{2}n\left(\frac{ex}{n+1}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{n}{n+ex}\right)^2$$
$$- \varrho' n\left(\frac{ex}{n+1}\right)^3 - \varrho'' n^2\left(\frac{n}{n+ex}\right)^3$$

$$= \frac{ex\,(1-ex)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)(n+ex)} + \tfrac{1}{2}\,\frac{ex}{n+\frac{1}{n}}\,\frac{ex}{n+1} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\frac{ex}{n}}\right]^2$$
$$- \varrho'\,\frac{ex}{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{ex}{n+1}\right)^2 - \varrho''\left[\frac{1}{1+\frac{ex}{n}}\right]^2\frac{1}{n+ex}$$

mithin, weil ϱ' und ϱ'' immer zwischen 0 und $\frac{1}{3}$ liegen,

$$Lim\left[n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right] = \tfrac{1}{2}.$$

Dieser Grenzwerth beträgt weniger als die Einheit, folglich divergirt die Reihe 9) für $y = \frac{1}{e}\cdot$

§. 28.

Allgemeine Regeln für die Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern.

Die bisherigen Kennzeichen für die Convergenz oder Divergenz der unendlichen Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

verlieren ihre Brauchbarkeit, sobald gleichzeitig

$$Lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad \text{und} \quad Lim\left[n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = 1$$

ist; das Princip der Reihenvergleichung mufs dann von neuem angewendet werden, und zwar mag hierzu der Satz dienen, dafs die Reihen

$$1)\qquad \frac{1}{2(L2)^{1+\beta}} + \frac{1}{3(L3)^{1+\beta}} + \frac{1}{4(L4)^{1+\beta}} + \cdots,$$

$$2)\qquad \frac{1}{4\,L4(LL4)^{1+\beta}} + \frac{1}{5\,L5(LL5)^{1+\beta}} + \frac{1}{6\,L6(LL6)^{1+\beta}} + \cdots,$$

$$3)\qquad \frac{1}{8\,L8\,LL8(LLL8)^{1+\beta}} + \frac{1}{9\,L9\,LL9(LLL9)^{1+\beta}} + \cdots,$$

u. s. w.

gleichzeitig convergiren oder divergiren, jenachdem β positiv oder negativ ist (§. 26).

I. Wir betrachten zuerst den Ausdruck

$$4)\qquad \psi_1(n) = n\,Ln - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\,L(n+1)$$

und setzen voraus, dafs sich derselbe einer bestimmten endlichen Grenze γ_1 nähere, falls n ins Unendliche wächst. Ist nun γ_1 positiv, so denken wir uns zwischen 0 und $\frac{\gamma_1}{Le}$ eine willkürliche Zahl β eingeschaltet, so dafs $0 < \beta\,Le < \gamma_1$ ist, und betrachten $\beta\,Le$ als den Grenzwerth, welchem sich die Function

$$f_1(n) = \left[1 - \left(\frac{Ln}{L(n+1)}\right)^{\beta}\right] n\,Ln$$

bei unendlich wachsenden n nähert (§. 9, No. 3 und 4). Da nach

den gemachten Voraussetzungen $Lim\, f_1(n) < Lim\, \psi_1(n)$ ist, so mufs es immer ein bestimmtes n geben, von welchem ab $f_1(n) < \psi_1(n)$ bleibt, und vermöge der Werthe dieser Functionen findet sich von einem bestimmten n ab

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n}{n+1}\left(\frac{Ln}{L(n+1)}\right)^{1+\beta}$$

oder

$$5)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{t_{n+1}}{t_n},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$t_n = \frac{1}{n(Ln)^{1+\beta}}.$$

Die Reihe $t_2 + t_3 + t_4 +$ etc. ist identisch mit der Reihe 1) und convergirt wegen $\beta > 0$; zufolge der Ungleichung 5) convergirt nun auch die Reihe $u_2 + u_3 + u_4 +$ etc.

Wenn zweitens γ_1 negativ ist, so wählen wir die willkürliche Zahl β auf die Weise, dafs $0 > \beta\, Le > \gamma_1$ ist, und haben dann $Lim\, \psi_1(n) < Lim\, f_1(n)$, mithin von einer bestimmten Stelle ab $\psi_1(n) < f_1(n)$, woraus sich ergiebt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{t_{n+1}}{t_n}.$$

Wegen des negativen β divergirt die Reihe der t, und zufolge der vorstehenden Ungleichung divergirt um so mehr die Reihe der u. Die Convergenz oder Divergenz der letzteren Reihe entscheidet sich also durch das Vorzeichen von $Lim\, \psi_1(n)$. Mittelst der Substitution

$$Lz = \frac{lz}{l2} = M\, lz$$

kann man die künstlichen Logarithmen leicht in natürliche umsetzen und hat dann das Theorem:

Die unendliche, nur positive Glieder enthaltende Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. convergirt oder divergirt, jenachdem

$$Lim\left\{n\, ln - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\; l(n+1)\right\}$$

positiv oder negativ ist.

II. Der vorstehende Satz liefert in dem Falle $\gamma_1 = 0$ oder

$$6)\qquad Lim\left\{n\, ln - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\; l(n+1)\right\} = 0$$

keine Entscheidung; wir betrachten dann die Function

$$\psi_2(n) = n\, Ln\, LLn - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\; L(n+1)\; LL(n+1),$$

von welcher wir voraussetzen, dafs sie sich für $n = \infty$ einer bestimmten endlichen Grenze γ_2 nähere. Bei positiven γ_2 wählen wir eine beliebige Zahl β, so dafs

$$0 < \beta < \frac{\gamma_2}{(Le)^2} \quad \text{oder} \quad 0 < \beta\,(Le)^2 < \gamma_2$$

und denken uns $(\beta\, Le)^2$ als den Grenzwerth des Ausdrucks

$$f_2(n) = \left[1 - \left(\frac{LLn}{LL(n+1)}\right)^\beta\right] n\, Ln\, LLn.$$

Aus $Lim\, f_2(n) < Lim\, \psi_2(n)$ folgt, dafs von einer bestimmten Stelle an $f_2(n) < \psi_2(n)$ sein mufs; die letztere Ungleichung giebt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n\, Ln}{(n+1)\; L(n+1)} \left(\frac{LLn}{LL(n+1)}\right)^{1+\beta}$$

oder

7) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{t_{n+1}}{t_n},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$t_n = \frac{1}{n\, Ln (LLn)^{1+\beta}}.$$

Die Reihe $t_4 + t_5 + t_6 +$ etc. ist identisch mit der Reihe 2) und convergirt wegen $\beta > 0$; zufolge von No. 7) convergirt nun auch die Reihe $u_4 + u_5 + u_6 +$ etc. Durch ganz ähnliche Schlüsse, welche fast nur in der Vertauschung der Zeichen $<$ und $>$ bestehen, überzeugt man sich leicht, dafs die Reihe $u_4 + u_5 +$ etc. im Falle $\gamma_2 < 0$ divergirt.

Ersetzt man die künstlichen Logarithmen durch natürliche, so wird

$$\psi_2(n) = M^2 \left\{n\, ln\, ll(n) - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\; l(n+1)\; ll(n+1)\right\}$$
$$- M\, lM \left\{n\, ln - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\; l(n+1)\right\};$$

bei unendlich wachsenden n hat der Coefficient von MlM die Null zur Grenze zufolge der in No. 6) gemachten Voraussetzung, mithin ist

$$\gamma_2 = M^2\; Lim \left\{n\, ln\, lln - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\; l(n+1)\; ll(n+1)\right\}$$

wo nun das Vorzeichen des γ_2 nur noch von dem angedeuteten Grenzwerthe abhängt. Demnach convergirt oder divergirt die Reihe $u_0 + u_1 + u_2$ etc., jenachdem

$$Lim \left\{n\, ln\, lln - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\; l(n+1)\; ll(n+1)\right\}$$

positiv oder negativ ist.

Man wird ohne Mühe erkennen, wie die Betrachtung weiter zu führen ist, falls γ_2 oder der vorstehende Grenzwerth verschwindet; es wird daher die Angabe des Endresultates der ganzen Untersuchung ausreichen, nämlich:

Um die Convergenz oder Divergenz der unendlichen, nur positive Glieder enthaltenden Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

zu entscheiden, berechne man folgende Grenzwerthe

$$A = 1 - Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad B = Lim\left\{n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right\} - 1,$$

$$C_1 = Lim\left\{n\,ln - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\;l(n+1)\right\},$$

$$C_2 = Lim\left\{n\,ln\,l_2 n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\;l(n+1)\;l_2(n+1)\right\},$$

$$C_3 = Lim\left\{n\,ln\,l_2 n\,l_3 n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\;l(n+1)\;l_2(n+1)\;l_3(n+1)\right\},$$

u. s. w.

die gegebene Reihe convergirt oder divergirt dann, jenachdem die erste nichtverschwindende der Grössen A, B, C_1, C_2, C_3 etc. positiv oder negativ ist*).

Als Beispiel diene folgende Reihe

$$\frac{\beta(1-\beta)}{1^2} + \frac{(1+\beta)\;\beta(1-\beta)\;(2-\beta)}{1^2\,.\,2^2} + \frac{(2+\beta)\;(1+\beta)\;\beta(1-\beta)\;(2-\beta)\;(3-\beta)}{1^2\,.\,2^2\,.\,3^2} + \dots$$

worin β einen positiven echten Bruch bezeichnen möge; für $u_0 = 0$, $u_1 = \beta(1-\beta)$ u. s. w. ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+\beta)\;(n+1-\beta)}{(n+1)^2},$$

und daraus findet man $A = 0$ und $B = 0$. Ferner ergiebt sich

$$n\,ln - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\;l(n+1)$$
$$= l\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right\} - \beta(1-\beta)\,\frac{l(n+1)}{n+1};$$

*) Vergl. die Aufsätze von Bertrand und Bonnet in Liouville's *Journal de Mathématiques* Bd. VII, S. 35 u. Bd. VIII, S. 73, sowie Catalan, *Traité élémentair des séries*, Paris 1860.

wie leicht zu ersehen ist, hat der letzte Bruch die Null zur Grenze*) und daher wird

$$C_1 = l\left(\frac{1}{e}\right) = -1,$$

folglich divergirt die obige Reihe.

§. 29.

Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe verschiedene Vorzeichen besitzen, so kann man eine neue Reihe dadurch bilden, dafs man alle Glieder mit demselben Vorzeichen nimmt, und es läfst sich erwarten, dafs die ursprüngliche Reihe convergiren wird, wenn die abgeleitete Reihe convergirt. Um diefs genauer zu untersuchen, betrachten wir erst den einfachen und am häufigsten vorkommenden Fall, wo die Zeichen wechseln. Die ursprüngliche Reihe ist dann

1) $$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots,$$

und die abgeleitete Reihe der absoluten Werthe

2) $$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$

Wenn nun diese Reihe convergirt, d. h. wenn

$$Lim\, S_n = Lim\,(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n-1})$$

eine endliche Gröfse ist, so müssen sich die beiden Summen

$$P_m = u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2m-2}$$
$$Q_m = u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + \dots + u_{2m-1}$$

endlichen Grenzen nähern, denn im Gegenfalle würde $Lim\,(P_m + Q_m) = \infty$ werden, was der Convergenz der Reihe 2) widerspräche. Hieraus folgt augenblicklich, dafs auch der Grenzwerth von

$$P_m - Q_m$$
$$= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \dots + u_{2m-2} - u_{2m-1}$$

eine endliche Gröfse ist, dafs mithin die Reihe 1) convergirt und eine kleinere Summe besitzt als die Reihe 2). Ähnliche Schlüsse gelten in jedem anderen Falle.

---

*) Nach Formel 1) in §. 17 ist $e^z > z$, mithin, wenn beiderseits quadrirt wird, $e^{2z} > z^2$ oder $e^y > \frac{1}{4}y^2$; setzt man $e^y = \omega$, so folgt

$$\omega > \tfrac{1}{4}(l\omega)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{l\omega}{\omega} < \frac{4}{l\omega}$$

und bei unendlich wachsenden ω

$$Lim\,\frac{l\omega}{\omega} = 0 \quad \text{w. z. b. w.}$$

Man kann nun z. B. die Convergenzbedingung

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

auf die Reihe 2) oder direct auf No. 1) anwenden, nur hat man zu beachten, dafs der Quotient zweier auf einander folgender Glieder in den Reihen 1) und 2) der Gröfse nach derselbe und nur im Vorzeichen verschieden ist; die genannte Convergenzbedingung lautet daher

$$\left(Lim \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 < 1.$$

In ähnlicher Weise kann man z. B. auch die in §. 27 gegebenen Convergenzbedingungen auf die Reihe 1) übertragen, doch ist diefs um so weniger nothwendig, als sich die Convergenz einer Reihe mit alternirenden Vorzeichen viel einfacher mittelst nachstehender Betrachtung erledigen läfst.

Wir setzen voraus, dafs von einer bestimmten Stelle $n = k$ an jedes u gröfser als das nächstfolgende, mithin

$$u_k > u_{k+1} > u_{k+2} > u_{k+3} \dots$$

sei und aufserdem wie früher die Bedingung $Lim\ u_n = 0$ stattfinde. Bezeichnen wir nun mit R_1, R_3, R_5, etc. die Gröfsen

$$R_1 = u_k$$
$$R_3 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2})$$
$$R_5 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}) - (u_{k+3} - u_{k+4})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

und beachten, dafs alle eingeklammerten Differenzen positiv sind, so haben wir

3) $$R_1 > R_3 > R_5 > R_7 \dots\dots$$

Andererseits gilt für die Gröfsen

$$R_2 = (u_k - u_{k+1})$$
$$R_4 = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3})$$
$$R_6 = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}) + (u_{k+4} - u_{k+5})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

die Beziehung

4) $$R_2 < R_4 < R_6 < R_8 \dots,$$

und endlich ist noch bei unausgesetzt wachsendem m

5) $$Lim\ (R_{2m-1} - R_{2m}) = Lim\ u_{k+2m-1} = 0.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt, dafs sich R_{2m-1} und R_{2m} einer und derselben Grenze R nähern und zwar R_{2m-1} durch fortwährende Abnahme, R_{2m} durch fortwährende Zunahme. Der gemeinschaftliche Grenzwerth R ist nun erstens positiv, wie die Ungleichungen 4) unmittelbar zeigen, ferner beträgt er zufolge der Gleichung 5) weniger

als jede der Gröfsen R_1, R_3, R_5 etc., er mufs daher eine bestimmte endliche Gröfse sein. Vermöge der Gleichung $R = Lim\ R_{2m-1} = Lim\ R_{2m}$ ist

$$R = u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \dots.$$

mithin convergirt die vorliegende Reihe und ebenso die ursprüngliche Reihe

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^{k-1} u_{k-1}$$
$$+ (-1)^k (u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \dots).$$

Nach diesen Erörterungen haben wir folgendes Theorem:

Eine Reihe mit alternirenden Vorzeichen convergirt immer, sobald ihre Glieder von einer bestimmten Stelle an fortwährend und ins Unendliche abnehmen.

Diese Convergenzregel greift weiter als die vorige. So würde man z. B. die Convergenz der Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots.$$

nach dem früheren Satze nicht entscheiden können, weil die Reihe der absoluten Werthe, nämlich

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots.$$

divergent ist; dagegen zeigt das zweite Theorem, dafs die fragliche Reihe convergirt und dafs ihre Summen zwischen folgenden, einander immer näher kommenden Zahlen liegt

$$1 \text{ und } 1 - \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{-} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \quad \text{-} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

u. s. w.

Wir wollen an dieser passenden Stelle eine Eigenthümlichkeit erwähnen, die bei divergenten Reihen mit alternirenden Vorzeichen stattfinden kann. Ist nämlich $Lim\ u_n$ eine endliche von Null verschiedene Gröfse ϱ, so nähert sich $u_n - u_{n+1}$ der Grenze Null, und in Folge dieses Umstandes kann es geschehen, dafs die Reihen

$$S_{2m} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}),$$
$$S_{2m+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \dots - (u_{2m-1} - u_{2m})$$

gleichzeitig convergiren. Dann ist sowohl $Lim\ S_{2m}$ als $Lim\ S_{2m+1}$ eine endliche Gröfse, und als Differenz beider Werthe ergiebt sich

$$Lim\,(S_{2m+1} - S_{2m}) = Lim\ u_{2m} = \varrho$$

d. h. die Summen der Reihenglieder

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots$$

nähern sich zwei endlichen, um ϱ von einander verschiedenen Grenzen, jenachdem eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Gliedern zusammengerechnet wird. Divergente Reihen dieser besonderen Art hat man oscillirende Reihen genannt.

Das einfachste Beispiel bietet die Reihe

$$a - a + a - a + a - a + \dots$$

deren Summe bei gerader Gliederzahl $= 0$, bei ungerader Gliederzahl $= a$ ist.

Ein zweites Beispiel liefert die Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \dots$$

Hier ist, wenn jeder unechte Bruch von der Form $\frac{p+1}{p}$ in $1 + \frac{1}{p}$ zerlegt wird,

$$S_{2m} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\dots - \frac{1}{2m},$$

$$S_{2m+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\dots - \frac{1}{2m} + \frac{2m+2}{2m+1};$$

bezeichnet nun σ die Summe der convergirenden Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

so ergiebt sich

$$Lim\, S_{2m} = \sigma, \qquad Lim\, S_{2m+1} = \sigma + 1,$$

mithin oscillirt die genannte Reihe zwischen σ und $\sigma + 1$.

§. 30.

Bedingte und unbedingte Convergenz.

Aus der im §. 23 gezeigten Entstehungsweise der unendlichen Reihen geht unmittelbar hervor, daſs es nicht ohne Weiteres erlaubt sein kann, die Anordnung der einzelnen Glieder willkürlich abzuändern (denn es hieſse das, die Function φ durch eine andere ersetzen); es wird daher immer einer besonderen Untersuchung bedürfen, ob eine solche Umstellung der Glieder einen Einfluſs auf die Reihensumme hat oder nicht. Daſs in der That eine veränderte Anordnung der Glieder zu einer ganz anderen Summe führen kann, mögen folgende Beispiele darthun.

Die ursprüngliche Reihe sei die im vorigen Paragraphen erwähnte

$$\sigma = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

und daraus die folgende gebildet

$$s = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

wobei die Anordnung so getroffen ist, dafs auf zwei positive Glieder ein negatives folgt; es ist dann

$$\sigma = \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \cdots\right) < \frac{5}{6}.$$

Die Reihe s kann man sich dadurch entstanden denken, dafs in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m} = \frac{8m-3}{(4m-3)\,(4m-1)\,2m}$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$ genommen wird und alle entstehenden dreigliederigen Gruppen addirt werden. Da jede solche Gruppe einen positiven Werth hat (wegen $8m > 3$), so ist

$$s = \frac{5}{1 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{13}{5 \cdot 7 \cdot 4} + \frac{21}{9 \cdot 11 \cdot 6} + \cdots > \frac{5}{6},$$

woraus bereits hervorgeht, dafs $s > \sigma$ ist. Übrigens läfst sich das Verhältnifs von $s : \sigma$ auch genau bestimmen, wenn σ angesehen wird als der Grenzwerth von

$$\sigma_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right)$$

und ebenso s als Grenzwerth von

$$s_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Die Differenz beider Gleichungen giebt

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right],$$

und hieraus folgt durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n

$$s - \sigma = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right] = \tfrac{1}{2}\sigma,$$

sodafs also $s = \frac{3}{2}\sigma$ ist*).

*) Hie und da findet man die Meinung ausgesprochen, dafs ein Satz, der für jede endliche Anzahl von Gröfsen gilt, auch dann richtig bleiben müsse, wenn jene Anzahl

Als zweites Beispiel diene die convergirende Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\ldots.$$

Werden ihre Glieder folgendermaafsen umgestellt

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots\ldots,$$

so sind die einzelnen dreigliederigen Gruppen von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{4m-3}}+\frac{1}{\sqrt{4m-1}}-\frac{1}{\sqrt{2m}},$$

und zwar beträgt diese Gruppe mehr als

$$\frac{1}{\sqrt{4m}}+\frac{1}{\sqrt{4m}}-\frac{1}{\sqrt{2m}}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Die neue Reihe besitzt demnach eine gröfsere Summe als

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)$$

und ist folglich divergent.

Hiernach stellt sich die Nothwendigkeit heraus, zweierlei Arten von convergirenden Reihen zu unterscheiden; es heifse nämlich eine Reihe bedingt-convergent, wenn ihre Summe von der Anordnung der Glieder abhängt, sie heifse dagegen unbedingt-convergent, wenn ihre Summe auch bei beliebiger Umstellung der Glieder immer dieselbe bleibt. Damit wird man zu der Aufgabe geführt, die Kennzeichen der unbedingten Convergenz aufzusuchen.

Es sei U_n die Summe einer n-gliederigen Reihe etwa

1) $$U_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$$

und bei unendlich wachsenden n der Grenzwerth von U_n gleich einer bestimmten endlichen Gröfse U, mithin

2) $$U=u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots.$$

---

unendlich wird; das obige Beispiel, welches von Lejeune-Dirichlet in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1837, S. 48 angegeben worden ist, zeigt die Unrichtigkeit eines solchen Princips. Bei jeder endlichen Anzahl von Summanden ist die Anordnung der letzteren ohne Einflufs auf die Summe, bei unendlich vielen Summanden im Allgemeinen nicht.

Wie sich in §. 42 zeigen wird, ist $\sigma=l2$ mithin $s=\frac{3}{2}l2$. Dieses Resultat bildet einen speciellen Fall des folgenden, vom Verf. mittelst der Integralrechnung gefundenen Satzes: wenn in der convergirenden Reihe

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots=S$$

die Glieder so umgestellt werden, dafs immer p positive und q negative Glieder aufeinander folgen, wobei $p>q$ sein möge, so beträgt die Summe der neuen Reihe

$$S+\frac{Lim\,(n\,u_n)}{2}\,l\left(\frac{p}{q}\right).$$

(S. d. Verf. Übungsbuch zum Studium d. höheren Analysis. 2. Aufl. Bd. II, S. 178.)

d. h. die vorliegende Reihe convergent, so ist zu untersuchen, ob eine neue unendliche Reihe

3) $$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

welche sich von der vorigen nur in der Anordnung der Glieder unterscheidet, gleichfalls U zur Summe hat. Nehmen wir von der zweiten Reihe vorläufig die p ersten Glieder und setzen

4) $$V_p = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{p-1},$$

so können wir p so grofs wählen, dafs die n Glieder von U_n sämmtlich unter den p Gliedern von V_p enthalten sind. Aufserdem kommen in V_p noch $p-n$ Glieder vor, welche sich in der Form

$$u_q + u_r + u_s + \ldots,$$

vereinigen lassen und deren Indices q, r, s etc. gröfser als $n-1$ sind. Demnach ist

$$V_p - U_n = u_q + u_r + u_s + \cdots$$

mithin bei unendlich wachsenden n und p

$$Lim\, V_p - U = Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots);$$

soll nun die Reihe $v_0 + v_1 + v_2 +$ etc. gleichfalls U zur Summe haben, so mufs $Lim\, V_p = U$, mithin

5) $$Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0$$

sein, und diefs ist das Kennzeichen der unbedingten Convergenz der Reihe 2). Zu einer andern Form gelangt man auf folgendem Wege.

Wenn die Reihe 2) von einer bestimmten Stelle an nur positive Glieder enthält, so kann man n so grofs wählen, dafs alle in der Gleichung

$$U - U_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

rechter Hand vorkommenden Gröfsen positiv sind; die Summe $u_n + u_{n+1} +$ etc. ist der sogenannte Rest der Reihe und hat die Null zur Grenze, weil bei unendlich wachsenden n die linke Seite in $U - Lim\, U_n = 0$ übergeht.

Was ferner die Summe $u_q + u_r +$ etc. anbelangt, worin die Anzahl der Glieder $= p - n$ und jeder Index $> n - 1$ ist, so hat man wegen des positiven Vorzeichens aller Glieder

$$0 < u_q + u_r + u_s + \cdots < u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

mithin bei unendlich wachsenden p und n

$$Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0;$$

unter der gemachten Voraussetzung convergirt also die Reihe unbedingt.

Wenn die ursprüngliche Reihe theils positive, theils negative Glieder enthält und von keiner Stelle an Glieder mit gleichen Vorzeichen liefert, so verlieren die vorigen Schlüsse ihre Anwendbarkeit

und die Convergenz kann in diesem Falle möglicherweise eine nur bedingte sein. Unter der besonderen Voraussetzung, dafs die Reihe auch dann convergent bleibt, wenn statt der einzelnen Glieder deren absolute Werthe genommen werden, läfst sich aber die Sache weiter verfolgen. Bezeichnen wir nämlich den absoluten Werth irgend eines Gliedes u_n mit $[u_n]$ und ist nun

$$[u_0]+[u_1]+[u_2]+[u_3]+\dots$$

eine convergente Reihe, so hat man nach dem Vorigen

$$Lim\left\{[u_q]+[u_r]+[u_s]+\dots\right\}=0$$

d. h. der absolute Werth von u_q+u_r+ etc. kann kleiner als jede angebbare Zahl gemacht werden. Daraus folgt augenblicklich, dafs u_q+u_r+ etc. selber gleichfalls die Null zur Grenze hat oder dafs die Reihe unbedingt convergirt. Diefs giebt den Satz*):

Eine unendliche Reihe convergirt unbedingt, wenn sie ihre Convergenz auch in dem Falle behält, wo alle Reihenglieder auf ihre absoluten Werthe reducirt werden.

Hiernach erklärt sich, warum die anfangs besprochenen Reihen nur bedingt convergirten; sie werden nämlich divergent, wenn man ihre Glieder mit gleichen Vorzeichen nimmt.

§. 31.

Die Potenzenreihen.

Unter den Reihen von specieller Form, die später häufig vorkommen werden, führen wir zuerst die sogenannten Potenzenreihen an; sie sind unter dem allgemeinen Schema

1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$$

enthalten, worin x eine beliebige Variabele bezeichnet, und die von x unabhängigen Coefficienten a_0, a_1, a_2 etc. nach einem gegebenen Gesetze fortschreiten.

Zufolge der in den §§. 25, 29 und 30 entwickelten Sätze convergirt die Reihe 1) unbedingt, sobald der absolute Werth von

$$Lim\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}=Lim\frac{x}{\frac{a_n}{a_{n+1}}}$$

weniger als die Einheit beträgt; setzt man

2) $$Lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda$$

*) Derselbe ist von Scheibner aufgestellt worden in der Abhandlung „Über unendliche Reihen und deren Convergenz. Leipzig, 1860“ (§. 7).

so wird

$$Lim \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{x}{\lambda},$$

und der absolute Werth hiervon liegt unter der Einheit, wenn

$$-\lambda < x < +\lambda \quad \text{oder} \quad x^2 < \lambda^2$$

ist. Hierdurch bestimmt sich der Spielraum, auf welchen x beschränkt werden mufs, wenn die Reihe 1) unbedingt convergiren soll. Ob sie noch für $x = +\lambda$ oder $x = -\lambda$ ihre Convergenz behält, ist in jedem speciellen Falle nach den Convergenzregeln in den §§. 27, 28 und 29 zu entscheiden.

Bezeichnen wir den absoluten Werth einer Zahl z mit $[z]$, so haben wir für den Fall, dafs die Reihe convergirt,

$$Lim \left[\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right] = \left[\frac{x}{\lambda}\right] < 1,$$

für hinreichend grofse Werthe von n, etwa für $n = k, k+1, k+2$ etc., mufs demnach der Quotient

$$\left[\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right]$$

kleiner bleiben als ein zwischen $\left[\frac{x}{\lambda}\right]$ und 1 eingeschalteter willkürlicher Bruch γ, und nach einer schon oft gebrauchten Schlufsweise folgt hieraus

$$[a_{k+1} x^{k+1}] < [a_k x^k]\,\gamma, \qquad [a_{k+2} a^{k+2}] < [a_k x^k]\,\gamma^2, \ldots.$$

mithin

$$\begin{aligned} &[a_k x^k] + [a_{k+1} x^{k+1}] + [a_{k+2} x^{k+2}] + \ldots. \\ &< [a_k x^k]\,(1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \ldots.) \end{aligned}$$

oder

$$3) \qquad [a_k x^k] + [a_{k+1} x^{k+1}] + [a_{k+2} x^{k+2}] + \ldots. < \frac{[a_k x^k]}{1-\gamma}.$$

Denkt man sich die Reihe 1) in zwei Theile zerlegt, von denen der erste die k Anfangsglieder, der zweite alle übrigen Glieder enthält und R_k heifsen möge, so ist

$$\begin{aligned} 4) \qquad & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots. \\ & = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} + R_k, \end{aligned}$$

$$5) \qquad R_k = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + a_{k+2} x^{k+2} + \ldots.$$

und nun kann die Ungleichung 3) zu einer kürzeren Darstellung von R_k benutzt werden. Es erhellt nämlich unmittelbar, dafs R_k zwischen

$$[a_k x^k] + [a_{k+1} x^{k+1}] + [a_{k+2} x^{k+2}] + \ldots.$$

und

$$-\left\{[a_k x^k] + [a_{k+1} x^{k+1}] + [a_{k+2} x^{k+2}] + \ldots.\right\}$$

enthalten ist, dafs also die Ungleichung

$$\frac{[a_k\, x^k]}{1-\gamma} > R_k > -\frac{[a_k\, x^k]}{1-\gamma}$$

stattfindet; bezeichnet ϱ einen nicht näher bestimmten positiven oder negativen echten Bruch, so kann hiernach

6) $$R_k = \frac{\varrho[a_k\, a^k]}{1-\gamma}, \qquad -1 < \varrho < +1$$

gesetzt werden. Diese Formel ist in dem Falle von Werth, wo man die Summe der Reihe 1) durch wirkliche numerische Berechnung und Addition ihrer Glieder ermitteln will; hat man nämlich die k ersten Glieder summirt, so liefert die Formel 6) für $\varrho = -1$ und $\varrho = +1$ zwei Zahlen, zwischen denen der Rest R_k liegt, d. h. sie bestimmt das Minimum und Maximum des Fehlers, welcher aus der Vernachlässigung der übrigen Glieder entspringt.

Die Summe einer unendlichen und convergirenden Potenzenreihe ist im Allgemeinen eine gewisse Function der Variabelen (x), nach deren Potenzen die Reihe fortschreitet; die specielle Natur dieser Function hängt von der Form der Coefficienten ab und kann daher erst dann angegeben werden, wenn das Bildungsgesetz der Coefficienten näher bestimmt ist. Doch läfst sich wenigstens die Frage nach der Continuität der genannten Function allgemein entscheiden.

Innerhalb der Grenzen $x = -\lambda$ und $x = +\lambda$ sei $f(x)$ die Summe der Reihe 1), also

7) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \qquad -\lambda < x < +\lambda,$$

und ξ ein beliebiger, zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegender individueller Werth des x; denken wir uns die positiven Gröfsen δ und ε so klein gewählt, dafs $\xi + \delta$ und $\xi - \varepsilon$ gleichfalls zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ enthalten sind, so dürfen wir die Gleichung 7) sowohl für $x = \xi + \delta$ als für $x = \xi - \varepsilon$ in Anspruch nehmen und haben dann

8) $$f(\xi+\delta) - f(\xi-\varepsilon)$$
$$= (\delta+\varepsilon)\left\{a_1 \frac{\xi+\delta-(\xi-\varepsilon)}{\delta+\varepsilon} + a_2 \frac{(\xi+\delta)^2-(\xi-\varepsilon)^2}{\delta+\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + a_3 \frac{(\xi+\delta)^3+(\xi-\varepsilon)^3}{\delta+\varepsilon} + \dots\right\},$$

wo nun zu untersuchen ist, ob die rechte Seite die Null zur Grenze hat, wenn δ und ε gegen die Null convergiren. Der Einfachheit wegen wollen wir zunächst voraussetzen, dafs alle die Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. positiv seien und dafs auch ξ und $\xi - \varepsilon$ positive Werthe

haben mögen; auf der rechten Seite von No. 8) läfst sich dann auf jedes einzelne Reihenglied die Ungleichung

$$m\,\alpha^{m-1} > \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} > m\,\beta^{m-1}$$

für $\alpha = \xi + \delta$, $\beta = \xi - \varepsilon$ anwenden, und diefs giebt, weil alle Glieder positiv sind,

$$(\delta + \varepsilon)\,[1a_1 + 2a_2\,(\xi + \delta) + 3a_3\,(\xi + \delta)^2 + \dots]$$
$$> f(\xi + \delta) - f(\xi - \varepsilon) >$$
$$(\delta + \varepsilon)\,[1a_1 + 2a_2\,(\xi - \varepsilon) + 3a_3\,(\xi - \varepsilon)^2 + \dots].$$

In der unendlichen Reihe

9) $$1a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

ist nun

$$Lim\,\frac{(n+1)\,a_{n+1}\,x^{n+1}}{n a_n x^n} = Lim\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{x}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right\} = \frac{x}{\lambda}$$

mithin convergirt diese Reihe für $x^2 < \lambda^2$ d. h. unter derselben Bedingung wie die Reihe 7), folglich ist ihre Summe eine bestimmte Function, welche $f'(x)$ heifsen möge. Da $\xi + \delta$ und $\xi - \varepsilon$ der Convergenzbedingung genügen, so haben wir jetzt

$$(\delta + \varepsilon)\,f'(\xi + \delta) > f(\xi + \delta) - f(\xi - \varepsilon) > (\delta + \varepsilon)\,f'(\xi - \varepsilon).$$

Bei unendlich abnehmenden δ und ε bleiben $f'(\xi + \delta)$ und $f'(\xi - \varepsilon)$ immer endliche Gröfsen, während $\delta + \varepsilon$ die Null zur Grenze hat, daher wird

$$Lim\,[f(\xi + \delta) - f(\xi - \varepsilon)] = 0.$$

Hierin liegt der Satz, dafs die Summe einer aus positiven Gliedern bestehenden Potenzenreihe eine continuirliche Function bildet, so lange $x^2 < \lambda^2$ bleibt.

Dieses Theorem ist leicht auf den Fall auszudehnen, wo die Potenzenreihe positive und negative Glieder enthält. Denkt man sich nämlich alle positiven Glieder zu einer Reihe zusammengefafst und ebenso alle negativen Glieder, so erscheint die ursprüngliche Reihe als Differenz zweier neuen Reihen, von denen jede für sich nur positive Glieder zählt; auch ist eine solche andere Anordnung erlaubt, weil die ursprüngliche Potenzenreihe wegen $x^2 < \lambda^2$ unbedingt convergirt. Jede der neuen Reihen hat nach dem Vorigen eine stetige Function von x zur Summe, mithin ist auch die Differenz der beiden Reihen eine stetige Function von x, d. h.

Die Summe jeder Potenzenreihe, welche von irgend einer Stelle an rascher als eine geometrische Progression convergirt, ändert sich continuirlich innerhalb des hiernach bestimmten Convergenzintervalles,

Wir wollen endlich noch die Frage beantworten, unter welchen Bedingungen zwei Potenzenreihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots,$$

welche innerhalb eines gegebenen Intervalles $-\lambda < x < +\lambda$ gleichzeitig convergiren, eine und dieselbe Summe haben. Der Voraussetzung zufolge soll

10) $$a_0 + x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots) = b_0 + x(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots)$$

sein; die eingeklammerten Reihen convergiren innerhalb des angegebenen Intervalles und besitzen daher endliche Summen, welche $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ heifsen mögen, so dafs

$$a_0 + x\varphi_1(x) = b_0 + x\psi_1(x).$$

Läfst man x in Null übergehen, so bleiben $\varphi_1(0)$ und $\psi_1(0)$ endliche Gröfsen und es folgt

$$a_0 = b_0.$$

In No. 10) kann jetzt a_0 gegen b_0 gehoben und die Gleichung mit x dividirt werden; diefs giebt

11) $$a_1 + x(a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \ldots) = b_1 + x(b_2 + b_3 x + b_4 x^2 + \ldots)$$

oder in selbstverständlicher Bezeichnung

$$a_1 + x\varphi_2(x) = b_1 + x\psi_2(x).$$

Hier sind $\varphi_2(x)$ und $\psi_2(x)$ die Summen zweier convergirenden Reihen, also Functionen, welche für $-\lambda < x < +\lambda$ endliche Werthe haben. Durch Übergang zur Grenze für unendlich abnehmende x folgt daher

$$a_1 = b_1.$$

Aus der Gleichung 11) wird jetzt

$$a_2 + x(a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + \ldots) = b_2 + x(b_3 + b_4 x + b_5 x^2 + \ldots)$$

oder kurz

$$a_2 + x\varphi_3(x) = b_2 + x\psi_3(x),$$

wo $\varphi_3(x)$ und $\psi_3(x)$ für $-\lambda < x < +\lambda$ endliche Werthe behalten; der Übergang zur Grenze für unendlich abnehmende x giebt

$$a_2 = b_2.$$

Den weiteren Fortgang dieser Schlufsweise übersieht man leicht; er führt zu dem Satze:

Wenn zwei Potenzenreihen innerhalb eines die Null umfassenden Intervalles gleichzeitig convergiren, so können sie nur unter der Bedingung eine und dieselbe Summe haben, dafs die Coefficienten gleichhoher Potenzen beiderseits gleich sind.

Läfst sich eine gegebene Function $f(x)$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende und convergirende Reihe verwandeln, so ist dies zufolge des obigen Satzes nur auf eine einzige Art möglich.

§. 32.

Periodische Reihen.

Wegen späterer Anwendungen betrachten wir noch Reihen von den Formen

1) $$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots.$$

und

2) $$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots.$$

in welchen wir die mit a und b bezeichneten Coefficienten sämmtlich als positiv voraussetzen wollen. Wir können hier drei Fälle unterscheiden: entweder nämlich sind die Coefficienten einander gleich, oder sie bilden eine steigende oder endlich eine fallende Reihe.

Findet das Erste statt, wobei wir a den gemeinschaftlichen Werth der Gröfsen a_0, a_1, a_2 etc. und b den gemeinsamen Betrag von b_1, b_2, b_3 etc. nennen wollen, so ist in der ersten Reihe die Summe der n ersten Glieder

$$S_n = a\left[\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos (n-1)x\right]$$

d. i. nach der in §. 16 entwickelten Formel 8)

$$S_n = a\,\frac{\sin (n-\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}.$$

Für unendlich wachsende n nähert sich dieser Ausdruck keiner bestimmten Grenze, weil der Sinus eines zunehmenden Bogens immer zwischen $+1$ und -1 hin und her oscillirt. Die Reihe 1) hat demnach, ins Unendliche fortgesetzt, keine angebbare Summe, divergirt also. — Ähnlich verhält es sich in unserem Falle mit der Reihe 2); für diese ist nach §. 16, Formel 4)

$$S_n = b\left[\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx\right]$$

$$= b\left[\tfrac{1}{2}\cot \tfrac{1}{2}x - \frac{\cos (n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}\right]$$

wo nun wiederum $Lim\, S_n$ nicht angegeben werden kann und defswegen die unendliche Reihe 2) divergirt.

Bilden die Gröfsen a_0, a_1, a_2 etc. und ebenso b_1, b_2, b_3 etc. eine steigende Reihe, so findet offenbar die Divergenz um so mehr statt, und es bleibt daher noch der Fall zu untersuchen übrig, in welchem jene Gröfsen eine fallende Reihe ausmachen.

Multipliciren wir die Gleichung

$$S_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$$

mit $2 \sin \frac{1}{2} x$ und zerlegen rechter Hand jedes doppelte Product aus einem Cosinus und einem Sinus in die Differenz zweier Sinus, so wird

$$\begin{aligned} & 2\, S_{n+1} \sin \tfrac{1}{2} x \\ = & a_0 \sin \tfrac{1}{2} x + a_1 (\sin \tfrac{3}{2} x - \sin \tfrac{1}{2} x) + a_2 (\sin \tfrac{5}{2} x - \sin \tfrac{3}{2} x) + \dots \\ & \dots + a_{n-1} [\sin (n - \tfrac{1}{2}) x - \sin (n - \tfrac{3}{2}) x] \\ & + a_n [\sin (n + \tfrac{1}{2}) x - \sin (n - \tfrac{1}{2}) x]. \end{aligned}$$

Durch Vereinigung derjenigen Glieder, welche dieselben Sinus enthalten und durch Transposition von $a_n \sin (n + \frac{1}{2}) x$ ergiebt sich hieraus

$$\begin{aligned} & 2 \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, S_{n+1} - a_n \sin (n + \tfrac{1}{2}) x \\ = & (a_0 - a_1) \sin \tfrac{1}{2} x + (a_1 - a_2) \sin \tfrac{3}{2} x + (a_2 - a_3) \sin \tfrac{5}{2} x + \dots \\ & \dots + (a_{n-1} - a_n) \sin (n - \tfrac{1}{2}) x. \end{aligned}$$

Lassen wir n unendlich wachsen und setzen wir voraus, daſs die Abnahme der Gröſsen a_0, a_1, a_2, ... ins Unendliche geht, mithin $Lim\, a_n = 0$ ist, so bleibt jetzt linker Hand nur $2 \sin \frac{1}{2} x \,.\, Lim\, S_{n+1}$ übrig und rechter Hand wird die Reihe unendlich, also

$$3) \quad Lim\, S_{n+1} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x} \left\{ (a_0 - a_1) \sin \tfrac{1}{2} x + (a_1 - a_2) \sin \tfrac{3}{2} x \right. \\ \left. + (a_2 - a_3) \sin \tfrac{5}{2} x + (a_3 - a_4) \sin \tfrac{7}{2} x + \dots \right\}$$

Betrachten wir zunächst die Reihe

$$4) \quad (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots$$

bei welcher wir die in Parenthesen stehenden Differenzen als ihre einzelnen Glieder ansehen, so besitzt dieselbe erstens durchaus positive Glieder (wegen $a_0 > a_1 > a_2$ etc.) und ist zweitens auch convergent, denn man erhält durch Vereinigung der aufeinander folgenden Glieder successive

$$a_0 - a_1, \quad a_0 - a_2, \quad a_0 - a_3, \quad a_0 - a_4, \quad \dots.$$

d. h. Summen, welche sich (der Voraussetzung $Lim\, a_n = 0$ zufolge) der endlichen Grenze a_0 nähern. Wenn nun schon die aus nur positiven Gliedern bestehende Reihe

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots.$$

convergirt, so muſs dasselbe um so mehr mit der Reihe

$$5) \quad (a_0 - a_1) \sin \tfrac{1}{2} x + (a_1 - a_2) \sin \tfrac{3}{2} x + (a_2 - a_3) \sin \tfrac{5}{2} x + \dots.$$

der Fall sein, weil ihre Glieder, den absoluten Werthen nach, kleiner als die gleichstelligen Glieder der ersten Reihe sind, und auſserdem die Reihe 5) theils positive theils negative Glieder enthält. Bezeichnen wir demnach die endliche Summe der Reihe 5) mit A, so folgt aus No. 3)

$$Lim\, S_{n+1} = \frac{A}{2 \sin \frac{1}{2} x}$$

und hier ist die rechte Seite eine endliche Gröſse, sobald x nicht $= 0$ oder $= \pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$ etc. ist. Dieſs giebt folgenden Satz:

Wenn die positiven Gröſsen a_0, a_1, a_2, ... eine ins Unendliche abnehmende Reihe bilden, so convergirt die Reihe

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots$$

für alle x, welche nicht $= 0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$ etc. sind.

Läſst man $\pi - z$ an die Stelle von x treten, so folgt weiter:

Unter den obigen Voraussetzungen convergirt auch die Reihe

$$\tfrac{1}{2}a_0 - a_1 \cos z + a_2 \cos 2z - a_3 \cos 3z + \dots$$

für alle z, die nicht $= \pm \pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$ etc. sind.

Die Nothwendigkeit der hinzugefügten Determination erhellt übrigens auch von selbst aus der Bemerkung, daſs die Reihe in den angegebenen Ausnahmefällen die Form

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

erhält, wo nun, wegen des gleichen Vorzeichens aller Glieder, die bloſse unendliche Abnahme von a_0, a_1, a_2 etc. zur Convergenz nicht hinreicht. Für $x = \pi$ oder $z = 0$ kommt man auf das schon in §. 29 aus anderen Gründen bewiesene Theorem zurück.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten für die Reihe 2); multipliciren wir nämlich die Gleichung

$$S_n = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots + b_n \sin nx$$

mit $2 \sin \tfrac{1}{2}x$ und zerlegen rechter Hand jedes doppelte Sinusproduct in eine Cosinusdifferenz, so folgt

$$\begin{aligned} 2 S_n \sin \tfrac{1}{2}x = b_1 (\cos \tfrac{1}{2}x - \cos \tfrac{3}{2}x) + b_2 (\cos \tfrac{3}{2}x - \cos \tfrac{5}{2}x) + \dots \\ \dots + b_{n-1} [\cos (n - \tfrac{3}{2})\, x - \cos (n - \tfrac{1}{2} x)] \\ + b_n [\cos (n - \tfrac{1}{2})\, x - \cos (n + \tfrac{1}{2})\, x], \end{aligned}$$

und dieser Gleichung kann man leicht die Form geben

$$\begin{aligned} 2 \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, S_n + b_n \cos (n + \tfrac{1}{2})\, x \\ = b_1 \cos \tfrac{1}{2}x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2}x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2}x - \dots \\ \dots - (b_{n-1} - b_n) \cos (n - \tfrac{1}{2})\, x \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$ und $Lim\, b_n = 0$ folgt hieraus

$$Lim\, S_n = \frac{1}{2 \sin \tfrac{1}{2}x} \left\{ b_1 \cos \tfrac{1}{2}x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2}x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2}x - \dots \right\}$$

Die Reihe

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots$$

enthält nun lauter positive Glieder (jede Differenz für ein Glied ge-

rechnet) und ist aufserdem convergent, nämlich ihre Summe $= b_1$; hieraus folgt, dafs die Summe

$$(b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2} x + (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2} x + \ldots.$$

um so mehr eine endliche Gröfse und dafs mithin auch die Differenz

$$b_1 \cos \tfrac{1}{2} x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2} x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2} x - \ldots.$$

einen endlichen Werth haben mufs. Nennen wir den letzteren B, so ist jetzt

$$Lim\, S_n = \frac{B}{2 \sin \frac{1}{2} x}$$

also $Lim\, S_n$ eine endliche Gröfse, wenn nicht $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ etc. Die Reihe 2) mufs demnach, die genannten Fälle ausgenommen, convergiren, ist aber $x = 0$, oder $= \pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ etc., so reducirt sich die Reihe auf Null und convergirt also noch; man kann daher das Theorem aufstellen:

Wenn die positiven Gröfsen b_1, b_2, b_3 etc. eine ins Unendliche abnehmende Reihe bilden, so ist die Reihe

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots.$$

jederzeit convergent.

Für $x = \pi - z$ ergiebt sich hieraus noch der Satz:

Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Reihe

$$b_1 \sin z - b_2 \sin 2z + b_3 \sin 3z - \ldots.$$

gleichfalls jederzeit convergent.

So geht z. B. aus den entwickelten vier Theoremen auf der Stelle hervor, dafs von den Reihen

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{4} + \ldots$$

$$\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 4x}{4} + \ldots$$

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

die erste für alle x convergirt, die nicht $= 0$ oder gleich einem geraden Vielfachen von π sind, dafs ferner die zweite convergirt, wenn x kein ungerades Vielfaches von π ausmacht und dafs endlich die beiden letzten Reihen jederzeit convergiren*),

---

*) Die beiden allgemeinen Sätze dürfte der Verf. zuerst aufgestellt haben. Für den speciellen Fall, dafs a_0, a_1, a_2 etc., b_1, b_2 etc. Binomialcoefficienten sind, hat Abel dieselben Sätze bewiesen in seiner Untersuchung über die Binomialreihe, Crelle's Journal für Mathem. Bd. I, S. 311.

§. 33.

Die Addition und Multiplication unendlicher Reihen.

Wir haben früher angedeutet, dafs es eines der wichtigsten Geschäfte der Analysis sei, unendliche Reihen zu summiren; diese Aufgabe läfst sich nur dadurch lösen, dafs man mit den fraglichen Reihen verschiedene Rechnungsoperationen vornimmt, wobei auch der Fall eintreten kann, dafs man unendliche Reihen zu addiren oder zu multipliciren, oder sonstige Hülfsmittel des Calcüls auf sie anzuwenden hat. Bevor wir aber derartige Untersuchungen anfangen, haben wir die Frage zu beantworten, in wie weit es erlaubt ist, solche Rechnungsoperationen mit unendlichen Reihen vorzunehmen. Diese Frage ist defshalb nothwendig, weil die Arithmetik nur mit endlichen bestimmten Gröfsen oder Polynomen von endlicher Gliederanzahl rechnen lehrt, hier aber Ausdrücke, welche ins Unendliche fortlaufen, dem Calcül unterworfen werden sollen.

Über die Befugnifs nun, mit unendlichen Reihen nach den Regeln der Arithmetik zu rechnen, haben wir Folgendes zu bemerken. Alle bisherigen Rechnungen beschäftigen sich mit Gleichungen, und selbst da, wo Ungleichheiten eingeführt wurden, geschah diefs nur zur Ausmittelung von Grenzwerthen, welche sich zuletzt doch wieder in Gleichungen aussprachen. Es liefse sich wohl auch eine Analysis denken, die es mit unbestimmteren Beziehungen, etwa Ungleichheiten, Ähnlichkeiten u. dergl. zu thun hätte, aber sie würde nur von untergeordneter Bedeutung sein, da man in das Wesen der Gröfsenverknüpfungen offenbar durch Gleichungen die klarste Einsicht bekommen mufs. Daraus folgt sogleich, dafs wir die divergenten Reihen aus analytischen Betrachtungen ganz ausschliefsen müssen, weil divergente Reihen keiner gestimmten Gröfse g l e i c h sind. So bleiben uns allein die convergenten Reihen und bei diesen lassen sich die Umstände, unter welchen man mit ihnen rechnen kann, leicht aus der Lehre von den Grenzen herleiten.

I. Setzen wir

$$P_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$
$$Q_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$

und bezeichnen mit a und b zwei von n unabhängige Factoren, so haben wir

$$(au_0 + bv_0) + (au_1 + bv_1) + \cdots + (au_n + bv_n)$$
$$= aP_n + bQ_n.$$

Unter der Voraussetzung, dafs $Lim\, P_n = P$ und $Lim\, Q_n = Q$ end-

liche Gröfsen sind, convergiren die obigen Reihen, und die Summe der ersten ist P, die der zweiten Q; ferner ergiebt sich aus der letzten Gleichung für $n = \infty$

$$(au_0 + bv_0) + (au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) + \dots \\ = aP + bQ$$

d. h. in Worten:

Das Aggregat zweier convergenter Reihen ist wieder eine convergirende Reihe und die Summe der letzteren gleich dem Aggregate von den Summen der ursprünglichen Reihen.

Dieser Satz kann leicht auf jede endliche Anzahl convergirender Reihen ausgedehnt werden.

II. Um den entsprechenden Satz für das Product zweier Reihen zu erhalten, denken wir uns letztere als Potenzenreihen, wodurch die Übersicht über die entstehenden Partialproducte erleichtert wird; es sei nämlich

1) $$P_{2n} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}$$

2) $$Q_{2n} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{2n} x^{2n}.$$

Das Product von beiden Reihen ist

3) $$\begin{aligned} & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x \\ & + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 \\ & + \dots\dots\dots \\ & + (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \dots + a_{2n-1} b_1 + a_{2n} b_0)\, x^{2n} \\ & + (a_1 b_{2n} + a_2 b_{2n-1} + \dots + a_{2n-1} b_2 + a_{2n} b_1)\, x^{2n+1} \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (a_{2n-1} b_{2n} + a_{2n} b_{2n-1})\, x^{4n-1} \\ & + a_{2n} b_{2n} x^{4n}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit S_{2n} die Summe der $n+1$ ersten Glieder des Productes, also

4) $$S_{2n} = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 + \dots \\ \dots + (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \dots + a_{2n-1} b_1 + a_{2n} b_0)\, x^{2n}$$

so ist

5) $$S_{2n} < P_{2n} Q_{2n}$$

weil $P_{2n} Q_{2n}$ aufser dem, was in S_{2n} sich findet, noch die Glieder mit x^{2n+1}, x^{2n+2}, ... x^{4n} enthält, welche positiv sind, da alle Glieder der Reihen 1) und 2) positiv angenommen werden. Multiplicirt man dagegen die Reihen

6) $$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

7) $$Q_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

welche n Glieder weniger enthalten als die in 1) und 2), so erhält man als Product

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x \\ & + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}) x^{2n-1} \\ & \quad + a_n b_n x^{2n} \end{aligned}$$

und aus der Vergleichung desselben mit 4) ergiebt sich

8) $$S_{2n} > P_n Q_n.$$

Es ist also zusammen mit 5)

9) $$P_{2n} Q_{2n} > S_{2n} > P_n Q_n.$$

Lassen wir nun n ins Unendliche wachsen, so werden die mit P_{2n} und P_n, Q_{2n} und Q_n bezeichneten Reihen zugleich unendliche; bezeichnen wir ihre Summen mit P und Q, welche hier wegen der Convergenz jener Reihen endliche bestimmte Gröfsen sind, so ist

$$Lim\, P_{2n} = Lim\, P_n = P$$
$$Lim\, Q_{2n} = Lim\, Q_n = Q.$$

Die äufsersten Grenzen in der Ungleichung 9), zwischen denen S_{2n} liegt, rücken also dann immer näher an einander und es mufs folglich sein:

$$Lim\, S_{2n} = PQ$$

d. h. die Summe der Reihe 4) ist endlich, folglich die Reihe convergent und ihre Summe gleich dem Producte der ihre Factoren bildenden Reihensummen.

Hören die Reihen 1) und 2) mit ungeradstelligen Gliedern auf, d. h. sind sie von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1}$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{2n} x^{2n} + b_{2n+1} x^{2n+1}$$

so bezeichne man sie mit

$$P_{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{und} \quad Q_{2n} + b_{2n+1} x^{2n+1}$$

und setze diefs in dem vorigen Beweise für P_{2n} und Q_{2n}, so reducirt man diesen Fall auf den vorigen und kann nun allgemein sagen:

Wenn die unendlichen und convergenten Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

nur positive Glieder enthalten, so ist ihr Product identisch mit

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots$$

und das Product ihrer Summen gleich der Summe dieser neuen Reihe.

In diesem Falle also ist die Multiplication nach den Regeln der Arithmetik geradezu erlaubt.

Die soeben geführten Schlüsse finden keine Anwendung mehr, wenn die Reihen 1) und 2) auch negative Glieder enthalten. Denn in diesem Falle kann man nicht sagen, dafs $S_{2n} < P_{2n}Q_{2n}$ sei, weil die Glieder, welche $P_{2n}Q_{2n}$ mehr enthält als S_{2n}, zusammen so viel Negatives geben könnten, dafs $P_{2n}Q_{2n}$ gleich oder kleiner als S_{2n} würde, und eben so wenig darf man behaupten, dafs $S_{2n} > > P_n Q_n$ sei.

Um auch diesen Fall zu erledigen, betrachten wir Reihen mit alternirenden Vorzeichen, nämlich

$$P = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots,$$
$$Q = b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + \dots.$$

Vorausgesetzt, dafs diese Reihen auch dann ihre Convergenz behalten, wenn alle Glieder mit gleichen Vorzeichen genommen werden, sind die Summen der Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

endliche Gröfsen, mithin convergiren auch die Reihen der geradstelligen und ungeradstelligen Glieder für sich; setzen wir daher

$$U_0 = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots,$$
$$U_1 = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots,$$
$$V_0 = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + b_6 x^6 + \dots,$$
$$V_1 = b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + \dots,$$

so sind U_0, U_1, V_0, V_1 endliche Gröfsen*). Nach dem in No. I bewiesenen Satze ist nun

$$P = U_0 - U_1, \qquad Q = V_0 - V_1$$

ferner nach der Regel für die Multiplication von Reihen mit positiven Gliedern

$$\begin{aligned}
U_0 V_0 &= a_0 b_0 && + (a_0 b_2 + a_2 b_0)\, x^2 && && + \dots \\
U_0 V_1 &= && a_0 b_1 x && && + (a_0 b_3 + a_2 b_1)\, x^3 + \dots \\
U_1 V_0 &= && a_1 b_0 x && && + (a_1 b_2 + a_3 b_0)\, x^3 + \dots \\
U_1 V_1 &= && && a_1 b_1 x^2 && + \dots
\end{aligned}$$

---

*) Die Nothwendigkeit der gemachten Voraussetzung zeigt u. A. das Beispiel $x = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{1}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ etc. Die Reihe

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \dots$$

verliert nämlich ihre Convergenz, wenn alle Glieder mit gleichen Vorzeichen genommen werden, und daher darf auch die Convergenz der einzelnen Reihen

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} \text{ etc. und } \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \text{etc.}$$

nicht behauptet werden.

und daraus ergiebt sich

$$U_0V_0 - U_0V_1 - U_1V_0 + U_1V_1$$
$$= a_0b_0 - (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2$$
$$- (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \ldots .$$

Die linke Seite ist eine endliche Gröſse und einerlei mit

$$(U_0 - U_1)\,(V_0 - V_1) = PQ$$

mithin convergirt die rechts stehende Reihe und hat PQ zur Summe. Nach der gemachten Voraussetzung gilt jetzt folgender Satz*):

Wenn die unendlichen und convergirenden Reihen

$$a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots,$$
$$b_0 - b_1x + b_2x^2 - b_3x^3 + \ldots,$$

ihre Convergenz in dem Falle behalten, wo alle Glieder mit gleichen Vorzeichen genommen werden, so convergirt auch die Reihe

$$a_0b_0 - (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 - \ldots$$

und ihre Summe ist gleich dem Producte aus den Summen der vorigen Reihen.

Wie man sieht, darf man unter der angegebenen Bedingung die Reihen auf gewöhnliche Weise multipliciren; daſs im Gegenfalle die Gültigkeit des Satzes aufhört, mag folgendes Beispiel zeigen.

Nimmt man

$$x = 1, \qquad a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n+1}}$$

und multiplicirt die convergirende Reihe

10) $$P = \frac{1}{\sqrt[4]{1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} - \ldots$$

mit sich selbst, indem man die Glieder auf die angegebene Weise ordnet, so erhält man eine neue Reihe

$$S = t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + \ldots$$

und darin ist

$$t_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-1)2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-2)3}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}.$$

Um diesen Ausdruck zusammenzuziehen, erinnern wir an den bekannten Satz, daſs das geometrische Mittel zweier Zahlen kleiner ist als deren arithmetisches Mittel, daher auch

*) Derselbe rührt von Cauchy her: *Cours d'analyse algèbrique*, p. 157.

$$\sqrt{(n-k)(k+1)} < \frac{n+1}{2};$$

daraus folgt

$$\sqrt[4]{(n-k)(k+1)} < \sqrt{\tfrac{1}{2}(n+1)}$$

und umgekehrt

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(n-k)(k+1)}} > \sqrt{\frac{2}{n+1}}.$$

Setzt man in dieser Ungleichung $k = 0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ und addirt alle entstehenden Ungleichungen, so erhält man

$$t_n > n\sqrt{\frac{2}{n+1}} \quad \text{oder} \quad t_n > \sqrt{\frac{2n^2}{n+1}} > \sqrt{2(n-1)}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs t_n gleichzeitig mit n ins Unendliche wächst; die Reihe S divergirt also und es kann daher S nicht $= P^2$ sein. Gleichwohl war die Reihe 10) convergent, aber sie würde eine divergente Reihe geliefert haben, wenn man die einzelnen Glieder sämmtlich positiv genommen hätte.

Das gegebene Beispiel zeigt sehr deutlich, dafs man Rechnungsoperationen, die für endlich bestimmte Gröfsen gelten, nicht ohne besondere Vorsicht auf unendlich fortlaufende Ausdrücke anwenden darf. Das vollständige Product der als convergent vorausgesetzten Reihen

11) $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots.$$

und

12) $$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots.$$

ist nämlich

13)
$$\begin{array}{l} a_0b_0 + a_0b_1x + a_0b_2x^2 + a_0b_3x^3 + \ldots. \\ + a_1b_0x + a_1b_1x^2 + a_1b_2x^3 + a_1b_3x^4 + \ldots. \\ + a_2b_0x^2 + a_2b_1x^3 + a_2b_2x^4 + a_2b_3x^5 + \ldots. \\ + a_3b_0x^3 + a_3b_1x^4 + a_3b_2x^5 + a_3b_3x^6 + \ldots. \\ + \;.\;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{array}$$

und diefs giebt in der That immer eine convergente Reihe, sobald man die Glieder in horizontaler oder verticaler Richtung zusammen nimmt. Aber so ordnet man die Glieder nicht; man vereinigt sie in diagonaler Richtung, indem man immer diejenigen Glieder sucht, welche gleiche Potenzen von x enthalten. Diese Anordnung ist es, welche den Fehler herbeiführt. Man nimmt gewissermaafsen immer nur die eine durch die Diagonale abgeschnittene Hälfte von dem Quadrate, welches die sämmtlichen Glieder des Productes bilden, und bekümmert sich um die andere Hälfte nicht. Wird

nun letztere immer kleiner, je weiter man mit der Diagonale herabrückt, so ist eine solche Anordnung erlaubt; wird sie aber immer gröfser, wie in unserem Beispiele, so ist diese Anordnung falsch, weil sie vernachlässigt, was nicht vernachlässigt werden darf. Man kann diefs auch so ausdrücken: Das Aggregat der Glieder in 13) ist das vollständige Product der Reihen 11) und 12), die Reihe

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots$$

dagegen nur das unvollständige Product; dieses kann jenes vertreten, wenn das, was zur Vollständigkeit fehlt, immer kleiner wird, wie unter den oben angegebenen Umständen; das unvollständige Product darf aber nicht an die Stelle des vollständigen gesetzt werden, wenn man nicht von der beständigen Abnahme der Ergänzung überzeugt ist.

§. 24.

Die Doppelreihen.

Unter einer Doppelreihe, oder, wie man öfter sagt, einer Reihe mit doppeltem Eingange, versteht man ein Aggregat von Gliedern, welche nach folgendem Schema zusammengestellt sind:

$$1)\quad \begin{array}{l} \, u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ + u_0^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{I}} + u_2^{\mathrm{I}} + u_3^{\mathrm{I}} + \dots \\ + u_0^{\mathrm{II}} + u_1^{\mathrm{II}} + u_2^{\mathrm{II}} + u_3^{\mathrm{II}} + \dots \\ + u_0^{\mathrm{III}} + u_1^{\mathrm{III}} + u_2^{\mathrm{III}} + u_3^{\mathrm{III}} + \dots \\ + \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Das allgemeine Glied einer solchen Reihe wird durch das Symbol

$$u_n^{(m)}$$

dargestellt, worin m und n ganze positive Zahlen sind, von denen man m den oberen und n den unteren Index nennen kann. Nimmt man eine endliche Anzahl von Gliedern aus dem Schema 1) heraus, etwa

$$2)\quad \begin{array}{l} \, u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} \\ + u_0^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{I}} + u_2^{\mathrm{I}} + \dots + u_{n-1}^{\mathrm{I}} \\ + u_0^{\mathrm{II}} + u_1^{\mathrm{II}} + u_2^{\mathrm{II}} + \dots + u_{n-1}^{\mathrm{II}} \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + u_0^{(m-1)} + u_1^{(m-1)} + u_2^{(m-1)} + \dots + u_{n-1}^{(m-1)} \end{array}$$

so ist die Summe derselben jedenfalls eine endliche Gröfse, sobald die einzelnen Reihenglieder selbst endliche Gröfsen sind, und in so fern jene Summe eine Function von m und n sein mufs, wollen wir sie mit

$$s_n^{(m)}$$

bezeichnen. Die Summe der unendlichen Doppelreihe 1) nennen wir dasjenige, was aus $s_n^{(m)}$ wird, wenn man die ganzen Zahlen m und n gleichzeitig ins Unendliche wachsen läſst. Hierbei sind offenbar zwei Fälle möglich; entweder nämlich nähert sich $s_n^{(m)}$ unter den angegebenen Umständen einer bestimmten Grenze S, oder es ist eine solche feste Grenze nicht angebbar, sei es nun, weil sie im Unendlichen liegt oder weil sie überhaupt unbestimmt ist, wie z. B. $Lim\ sin\ (mx + ny)$. Im ersten Falle nennen wir die unendliche Doppelreihe convergent und S ihre Summe, im zweiten Falle heiſst die Reihe divergent und besitzt keine Summe. Die Verhältnisse der Convergenz und Divergenz gestalten sich hier so eigenthümlich, daſs sie einer besonders genauen Untersuchung bedürfen.

I. Setzen wir die gegebene Doppelreihe als convergent voraus, so muſs jede einzelne einfache Reihe, welche man aus ihr herausgreifen kann, selbst convergiren, weil sie einen Bestandtheil jener Doppelreihe bildet; daher muſs jede der einfachen unendlichen Reihen, welche aus den horizontal neben einander oder vertical unter einander stehenden Gliedern gebildet ist, ebenfalls convergent sein. Bezeichnen wir mit $s^{(m)}$ die Summe der m ersten unendlichen Horizontalreihen in No. 1), d. h. die Summe der m ersten Glieder der einfachen Reihe

3) $$\begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \\ \qquad + u_0^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{I}} + u_2^{\mathrm{I}} + \cdots \\ \qquad\qquad + u_0^{\mathrm{II}} + u_1^{\mathrm{II}} + u_2^{\mathrm{II}} + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad + \cdots\cdots \end{array}$$

(jede Zeile für ein Glied gerechnet), so ist $s^{(m)}$ die Grenze von $s_n^{(m)}$ für unendlich wachsende n, und lassen wir in $s^{(m)}$ auch m noch unendlich zunehmen, so geht $Lim\ s^{(m)}$ in S über. Bezeichnen wir auf gleiche Weise mit s_n die Summe der n ersten unendlichen Verticalreihen, also die Summe der n ersten Glieder der Reihe

4) $$\begin{array}{l} u_0 + u_0^{\mathrm{I}} + u_0^{\mathrm{II}} + \cdots \\ \qquad + u_1 + u_1^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{II}} + \cdots \\ \qquad\qquad + u_2 + u_2^{\mathrm{I}} + u_2^{\mathrm{II}} + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad + \cdots\cdots \end{array}$$

(jede Zeile für ein Glied gerechnet), so ist s_n die Grenze von $s_n^{(m)}$ für unendlich wachsende m; lassen wir in s_n nachher auch n unendlich werden, so wird $Lim\ s_n = S$. Dieſs giebt folgenden Satz:

Wenn die unendliche Doppelreihe 1) convergirt und S ihre Summe heifst, so sind auch die Reihen 3) und 4) convergent und besitzen dieselbe Summe S.

II. Die soeben angestellten Betrachtungen setzen voraus, dafs die Convergenz der Doppelreihe 1) bekannt sei, und schliefsen von da auf die Convergenz derjenigen einfachen Reihen 3) und 4), welche entstehen, wenn man entweder jede Horizontalreihe oder jede Verticalreihe als Glied einer neuen einfachen Reihe ansieht; es fragt sich nun, ob diese Schlüsse auch umgekehrt gelten, ob also aus der Convergenz der Reihen 3) und 4) die Convergenz der Doppelreihe nothwendig folgt. Die zur Beantwortung dieser Frage dienende Untersuchung ist folgende.

Wenn eine einfache Reihe convergirt, also die folgenden Gleichungen stattfinden:

$$S_k = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{k-1}$$

$$Lim\ S_k = S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots \text{ in inf.}$$

so folgt durch Subtraction

$$S - S_k = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots;$$

läfst man hier k ins Unendliche wachsen, so wird wegen $Lim\, S_k = S$,

$$0 = Lim \left\{ U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots \right\}$$

d. h. man kann bei einer convergenten Reihe $U_0 + U_1 + U_2 +$ etc. die Summe $U_k + U_{k+1} + U_{k+2} +$ etc. kleiner als jede angebbare Gröfse machen, wenn man nur k hinreichend grofs wählt. Diese einfache Bemerkung läfst sich in unserem Falle auf folgende Weise anwenden.

Aus der gegebenen Doppelreihe 1) bilden wir die Reihe der absoluten Werthe aller Reihenglieder, nämlich

$$\begin{array}{lllllllll}
5)\ \ r_0 & + r_1 & + r_2 & + \dots + r_{n-1} & + r_n & + r_{n+1} & + \dots \\
+ r_0^{\mathrm{I}} & + r_1^{\mathrm{I}} & + r_2^{\mathrm{I}} & + \dots + r_{n-1}^{\mathrm{I}} & + r_n^{\mathrm{I}} & + r_{n+1}^{\mathrm{I}} & + \dots \\
+ r_0^{\mathrm{II}} & + r_1^{\mathrm{II}} & + r_2^{\mathrm{II}} & + \dots + r_{n-1}^{\mathrm{II}} & + r_n^{\mathrm{II}} & + r_{n+1}^{\mathrm{II}} & + \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
+ r_0^{(m-1)} & + r_1^{(m-1)} & + r_2^{(m-1)} & + \dots + r_{n-1}^{(m-1)} & + r_n^{(m-1)} & + r_{n+1}^{(m-1)} & + \dots \\
+ r_0^{(m)} & + r_1^{(m)} & + r_2^{(m)} & + \dots + r_{n-1}^{(m)} & + r_n^{(m)} & + r_{n+1}^{(m)} & + \dots \\
+ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Setzen wir voraus, dafs die einfache Reihe der Horizontalcolonnen, also die Reihe

6)
$$\begin{array}{l} r_0 + r_1 + r_2 + \dots \\ \qquad + r_0^{\mathrm{I}} + r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}} + \dots \\ \qquad\qquad + r_0^{\mathrm{II}} + r_1^{\mathrm{II}} + r_2^{\mathrm{II}} + \dots \\ \qquad\qquad\qquad + \dots\dots \end{array}$$

convergire, so kann nach dem ebenerwähnten Satze die Summe

7)
$$\begin{array}{l} r_0^{(m)} + r_1^{(m)} + r_2^{(m)} + \dots \\ \qquad + r_0^{(m+1)} + r_1^{(m+1)} + r_2^{(m+1)} + \dots \\ \qquad\qquad + \dots\dots\dots \end{array}$$

bei wachsenden m kleiner als jede angebbare Zahl gemacht werden, und wenn wir also mit ε eine willkürliche Gröfse bezeichnen, so kann die vorstehende Summe unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ verringert werden. Da ferner jedes einzelne Glied in No. 6) nach der gemachten Voraussetzung selbst eine convergente Reihe bilden mufs, so kann auch jede der Summen

8)
$$\left\{\begin{array}{llll} r_n & + r_{n+1} & + r_{n+2} & + \dots \\ r_n^{\mathrm{I}} & + r_{n+1}^{\mathrm{I}} & + r_{n+2}^{\mathrm{I}} & + \dots \\ r_n^{\mathrm{II}} & + r_{n+1}^{\mathrm{II}} & + r_{n+2}^{\mathrm{II}} & + \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n^{(m-1)} & + r_{n+1}^{(m-1)} & + r_{n+2}^{(m-1)} & + \dots \end{array}\right.$$

für sich betrachtet, unter jede beliebige Gröfse herabgebracht werden, wenn man n hinreichend wachsen läfst; demnach läfst sich jede solche Summe kleiner als $\frac{1}{2m}\varepsilon$ machen und mithin können die in No. 8) verzeichneten Glieder zusammen kleiner als $m \cdot \frac{1}{2m}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$ werden. Fügen wir zu den in No. 8) enthaltenen Gliedern noch die in No. 7) stehenden hinzu, so folgt nunmehr, dafs die Gröfsen:

9)
$$\begin{array}{llll} & & r_n + r_{n+1} + \dots \\ & & r_n^{\mathrm{I}} + r_{n+1}^{\mathrm{I}} + \dots \\ & & r_n^{\mathrm{II}} + r_{n+1}^{\mathrm{II}} + \dots \\ & & \dots\dots \\ & & r_n^{(m-1)} + r_{n+1}^{(m-1)} + \dots \\ r_0^{(m)} + r_1^{(m)} + r_2^{(m)} + \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ r_0^{(m+1)} + r_1^{(m+1)} + r_2^{(m+1)} + \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{array}$$

zusammen genommen kleiner als die willkürliche Gröfse ε gemacht werden können. Das Aggregat der in No. 9) verzeichneten Glieder darf nun jedenfalls für eine Doppelreihe gelten, von welcher eine end-

liche Gliederanzahl $= 0$ und mithin ausgefallen ist; diese Doppelreihe mufs nothwendig convergiren, weil ihre Summe erstlich weniger als ε beträgt und weil sie zweitens nicht eine unbestimmte zwischen endlichen Grenzen hin- und herschwankende Gröfse (wie $\sin\infty$) sein kann, da sie sich im Gegentheile beliebig klein machen läfst. Fügen wir nun zu der unendlichen Doppelreihe 9) die endliche Doppelreihe

$$\begin{array}{lllll} r_0 & + r_1 & + r_2 & + \ldots + r_{n-1} \\ + r_0^{I} & + r_1^{I} & + r_2^{I} & + \ldots + r_{n-1}^{I} \\ + r_0^{II} & + r_1^{II} & + r_2^{II} & + \ldots + r_{n-1}^{II} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ + r_0^{(m-1)} & + r_1^{(m-1)} & + r_2^{(m-1)} & + \ldots + r_{n-1}^{(m-1)} \end{array}$$

hinzu, so entsteht die Doppelreihe 5), welche nunmehr ebenfalls convergiren mufs. Unter Rücksicht auf das in No. I bewiesene Theorem ergiebt sich jetzt der folgende wichtige Satz*):

Wenn die absoluten Werthe der Glieder einer unendlichen Doppelreihe, in Horizontalcolonnen gruppirt, convergente Reihen bilden und wenn zweitens die aus den einzelnen Horizontalcolonnen gebildete einfache Reihe wiederum convergirt, so ist auch die Doppelreihe convergent und es bleibt dann gleichgültig, ob man die Glieder in horizontaler oder verticaler Richtung vereinigt.

Dafs dieses Theorem sogleich zu gelten aufhört, wenn die absoluten Werthe der einzelnen Glieder nicht mehr convergente Reihen liefern, wollen wir an einigen lehrreichen Beispielen nachweisen.

a. Die Doppelreihe sei

$$10)\quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)-\ldots \\ +\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2-\ldots \\ +\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3-\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Die Summe der ersten Horizontalreihe ist hier, weil sich je zwei Glieder aufheben und zugleich eine unendliche Abnahme der Glieder stattfindet:

---

*) Cauchy, *Cours d'analyse algèbr.* p. 537.

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right).$$

Die Summe der zweiten Horizontalreihe ist auf gleiche Weise

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$$

die Summe der dritten Horizontalreihe

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3$$

u. s. w. Vereinigt man diese Summen wiederum, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=+\frac{1}{2}.$$

Nehmen wir dagegen die Glieder der Doppelreihe erst in Verticalcolonnen zusammen, so ist die erste derartige Colonne

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right]=\frac{1}{2}$$

die Summe der zweiten Colonne

$$-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\right]=-\frac{2}{3}.$$

Die Summe der nächsten Colonne ist $+\frac{2}{3}$, die der folgenden

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots\right]=-\frac{3}{4}$$

u. s. f. Durch Vereinigung dieser Verticalreihen ergiebt sich

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}-\cdots$$

und diefs ist keine convergente Reihe mehr, da sie keine bestimmte Summe hat; hört man nämlich mit einem positiven Gliede auf, so ist für ein positives ganzes k

$$S_{2k-1}=\frac{1}{2} \text{ und } Lim\, S_{2k-1}=\frac{1}{2};$$

schliefst man dagegen mit einem negativen Gliede, so ist

$$S_{2k-2}=\frac{1}{2}-\frac{k}{k+1},\qquad Lim\, S_{2k-2}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

und die Reihe gehört demnach in die Kategorie der Reihen wie $1-1+1-1+$ etc., weil sie dieser immer ähnlicher wird, je weiter man geht. Das anscheinend befremdliche Resultat, dafs die Doppelreihe 10) bei der einen Anordnung convergent, bei der ande-

ren divergent ist, erklärt sich sehr einfach, wenn man die Doppelreihe erst als endliche ansieht und ihre Summe aufsucht. Schliefsen wir die erste Horizontalreihe mit dem Gliede $-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ ab, so ist ihre Summe

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

die Summe der zweiten Horizontalreihe ist auf gleiche Weise

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2;$$

indem man so fortgeht, ist die Summe der $m$ten Horizontalreihe

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^m-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m.$$

Durch Vereinigung dieser m endlichen Horizontalreihen ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(1-\frac{1}{2}\right)^m\right]$$
$$-\frac{1}{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right]$$

oder

$$\frac{1}{2}\,\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1-\left(1-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{n}\,\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}$$

und diefs ist die Summe der endlichen Doppelreihe. Um hieraus die Summe der unendlichen Doppelreihe abzuleiten, mufs man m und n gleichzeitig ins Unendliche wachsen lassen und diefs giebt:

$$\frac{1}{2}-1+Lim\,Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}.$$

Hier ist aber der Grenzwerth von $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}$ für gleichzeitig unendlich werdende n und m eine völlig unbestimmte Gröfse; läfst man erst n bei constanten m zunehmen, so ist

$$Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=1^{m+1}=1;$$

also wenn nachher m unendlich wird

$$Lim\,Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=1.$$

Läfst man dagegen zuerst m bei unveränderten n wachsen, so wird

$$Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=0,$$

mithin

$$Lim\,Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=0.$$

Man kann ebenso leicht jeden anderen Grenzwerth erhalten; setzt man z. B. $m+1=kn$, wo k eine unveränderliche ganze positive Zahl bedeutet, so wächst m mit n gleichzeitig und es ist jetzt

$$Lim\,Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{kn}=e^{-k}.$$

Die in No. 10) verzeichnete unendliche Doppelreihe hat demnach keine bestimmte Summe und ist folglich divergent, obgleich die einzelnen Horizontalcolonnen selbst convergiren und auch die Reihe ihrer Summen convergent ist; dagegen würden die absoluten Werthe der Reihenglieder nicht mehr convergente Reihen liefern, und ebendefshalb besteht das vorhin ausgesprochene Theorem nicht mehr.

b. Wie man leicht findet, bleibt der absolute Werth von $2x(1-x)$ so lange ein echter Bruch, als x zwischen $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ und $+\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ enthalten ist; es gilt daher die Reihenentwickelung

11) $$\frac{1}{1-2x(1-x)}=1+2x(1-x)+4x^2(1-x)^2+8x^3(1-x)^3+\ldots$$
$$-0{,}366\ldots<x<+1{,}366\ldots$$

Andererseits hat man folgende identische Gleichung

$$\frac{1}{1-2x(1-x)}=(1+2x+2x^2)\frac{4}{1+4x^4},$$

und hier läfst sich der rechts vorkommende Bruch wieder in eine Reihe verwandeln, wenn $4x^4<1$ ist, d. h. wenn x zwischen $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $+\frac{1}{2}\sqrt{2}$ liegt; nach Multiplication mit $1+2x+2x^2$ ergiebt sich

12) $$\frac{1}{1-2x(1-x)}$$
$$=1+2x+2x^2-4x^4-8x^5-8x^6+16x^8+32x^9+32x^{10}+\ldots$$
$$-0{,}707\ldots<x<+0{,}707\ldots$$

Als gemeinschaftliche Quelle der Reihen in 11) und 12) kann man nun folgende Doppelreihe ansehen

$$\begin{array}{llllllll}
1 + 2x - 2x^2 & & & & & & \\
& + 4x^2 - 8x^3 + 4x^4 & & & & & \\
& & + 8x^3 - 24x^4 + 24x^5 - 8x^6 & & & & \\
& & & + 16x^4 - 64x^5 + 96x^6 - \dots & & & \\
& & & & + 32x^5 - 160x^6 + \dots & & \\
& & & & & + 64x^6 - \dots & \\
& & & & & \dots\dots &
\end{array}$$

und in der That entsteht hieraus die Reihe in 11), wenn man zuerst die Horizontalzeilen zusammenrechnet, dagegen die Reihe 12) durch Vereinigung der in Verticalcolonnen stehenden Summanden. Unter welchen Umständen die eine oder andere Anordnung zu convergirenden einfachen Reihen führt, läſst sich hier im voraus beurtheilen, weil man die Convergenzbedingungen der Reihen 11) und 12) bereits kennt. Sind nämlich die beiden Ungleichungen

$$-0,366\ldots < x < +1,366\ldots$$

$$-0,707\ldots < x < +0,707\ldots$$

gleichzeitig erfüllt, was im Falle

13) $$-0,366\ldots < x < +0,707\ldots$$

eintritt, so liefern beide Anordnungen convergirende Reihen; genügt x der ersten, aber nicht der zweiten Bedingung, wozu gehört

$$+0,707\ldots < x < +1,366\ldots,$$

so convergirt nur die Reihe aus erster Anordnung; ist die zweite, aber nicht die erste Ungleichung erfüllt, d. h.

$$-0,707\ldots < x < -0,366\ldots$$

so convergirt auch nur die Reihe aus zweiter Anordnung; wenn endlich x keine der obigen Bedingungen erfüllt, was der Fall ist für

$$x < -0,707\ldots \quad \text{und für} \quad x > 1,366\ldots,$$

so convergirt keine der beiden Reihen. — Das allgemeine Criterium auf S. 144 sagt nun, daſs die doppelte Anordnung erlaubt ist, wenn alle Glieder, positiv genommen, nach der ersten Anordnung eine convergirende Reihe liefern, d. h. im vorliegenden Falle, wenn die Reihe

$$1 + 2x(1+x) + 4x^2(1+x)^2 + 8x^3(1+x)^3 + \dots$$

bei positiven x convergirt; hierzu gehört $x < \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$, also, falls auch negative x zugelassen werden,

$$-0,366\ldots < x < +0,366\ldots$$

Das Intervall für x ist hier etwas enger als in No. 13), wie dieſs öfter vorkommt, wenn allgemeine Sätze auf einen speciellen Fall angewendet werden.

III. Es seien P und Q die Summen der beiden convergenten Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

von welchen wir voraussetzen, dafs sie auch dann noch convergiren, wenn man die einzelnen Glieder auf ihre absoluten Werthe reducirt; bildet man die Doppelreihe

$$\begin{array}{rrrrr} u_0v_0 + u_1v_0 & + u_2v_0 & + u_3v_0 & + \dots \\ + u_0v_1 & + u_1v_1 & + u_2v_1 & + \dots \\ & + u_0v_2 & + u_1v_2 & + \dots \\ & & + u_0v_3 & + \dots \\ & & & + \dots \end{array}$$

so ist jede der hier vorkommenden Horizontalreihen convergent, und zwar hat die erste v_0P, die zweite v_1P, die dritte v_2P etc. zur Summe; ferner convergirt auch die Reihe dieser Summen, denn

$$v_0P + v_1P + v_2P + v_3P + \dots$$

ist das Product aus P und der als convergent vorausgesetzten Summe. Nach dem Theoreme in II convergirt nunmehr auch die obige Doppelreihe und darf in Verticalcolonnen geordnet werden, d. h. die neue Reihe

$$\begin{array}{l} u_0v_0 \\ + u_1v_0 + u_0v_1 \\ \qquad + u_2v_0 + u_1v_1 + u_0v_2 \\ \qquad\qquad + \dots \end{array}$$

convergirt unter den gemachten Voraussetzungen und hat PQ zur Summe. Es führt so die Betrachtung der Doppelreihen auf das Theorem in §. 33, II zurück.

Capitel VI.

Der binomische Satz.

§. 35.

Der binomische Satz für ganze positive Exponenten.

Bereits in den Elementen der Buchstabenrechnung begegnet man der Aufgabe, die verschiedenen ganzen positiven Potenzen einer zweitheiligen Gröfse durch Potenzen ihrer einzelnen Bestandtheile auszudrücken; mittelst gewöhnlicher Multiplication erhält man auch für die

einfacheren Fälle leicht die Auflösung jenes Problemes, welche in folgenden Gleichungen ausgesprochen ist:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
u. s. w.

Daran knüpft sich die weitere Frage, ob die allgemeine Potenz $(a+b)^\mu$, worin μ eine beliebige reelle Zahl bedeuten möge, auf ähnliche Weise entwickelt werden kann und nach welchem Gesetze die einzelnen Glieder der etwaigen endlichen oder unendlichen Reihe gebildet sind. Mit dieser Untersuchung beschäftigen wir uns im Folgenden.

Um zunächst den einfachsten Fall zu erledigen, betrachten wir die Potenz $(1+x)^m$, worin x eine beliebige Variabele, dagegen m eine ganze und positive Zahl sein möge. Aus dem Gange der Multiplicationen, die zur Entwickelung von $(1+x)^2$, $(1+x)^3$ u. s. w. dienen, ersieht man ohne Mühe, dafs die wirkliche Ausführung der m Multiplicationen, welche durch das Zeichen $(1+x)^m$ angedeutet werden, eine endliche Reihe liefern mufs, die mit 1 anfängt und alle die Potenzen $x, x^2, x^3, \ldots x^m$ enthält. Denkt man sich diese Reihe nach steigenden Potenzen von x geordnet, so gelangt man zu einem Resultate von der Form

2) $$(1+x)^m = 1 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots + C_mx^m,$$

worin $C_1, C_2, C_3, \ldots C_m$ gewisse, vor der Hand unbekannte Zahlencoefficienten bedeuten. Die Bestimmung derselben kann auf verschiedene Weise erfolgen, entweder durch combinatorische Betrachtungen oder rein analytisch auf folgendem Wege.

Entsprechend der Gleichung 1) ist, wenn wir x um eine beliebige Gröfse ϱ wachsen lassen,

$$(1+x+\varrho)^m = 1 + C_1(x+\varrho) + C_2(x+\varrho)^2 + C_3(x+\varrho)^3 + \ldots$$
$$\ldots + C_m(x+\varrho)^m;$$

wir subtrahiren hiervon die Gleichung 1) und geben der Differenz die Form

$$(1+x)^m\left[\left(1+\frac{\varrho}{1+x}\right)^m - 1\right]$$
$$= C_1x\left[\left(1+\frac{\varrho}{x}\right)-1\right] + C_2x^2\left[\left(1+\frac{\varrho}{x}\right)^2-1\right]$$
$$+ C_3x^3\left[\left(1+\frac{\varrho}{x}\right)^3-1\right] + \ldots + C_mx^m\left[\left(1+\frac{\varrho}{x}\right)^m-1\right].$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$\frac{\varrho}{1+x} = \delta, \quad \frac{\varrho}{x} = \varepsilon$$

und dividiren beide Seiten der vorigen Gleichung mit ϱ, wobei wir linker Hand ϱ durch das gleichgeltende $(1+x)\delta$, rechter Rand ϱ durch das ebenfalls gleichgeltende $x\varepsilon$ ersetzen; diefs giebt

$$\frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta}(1+x)^{m-1}$$

$$= C_1 \frac{(1+\varepsilon) - 1}{\varepsilon} + C_2 \frac{(1+\varepsilon)^2 - 1}{\varepsilon} x + C_3 \frac{(1+\varepsilon)^3 - 1}{\varepsilon} x^2 + \dots$$

$$\dots + C_m \frac{(1+\varepsilon)^m - 1}{\varepsilon} x^{m-1}.$$

Lassen wir die willkürliche Gröfse ϱ gegen die Null convergiren, so haben auch δ und ε die Null zur gemeinschaftlichen Grenze; ferner ist

$$Lim \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta} = m, \qquad Lim \frac{(1+\varepsilon)^k - 1}{\varepsilon} = k,$$

mithin geht die vorige Gleichung in die folgende über

$$m(1+x)^{m-1} = C_1 + C_2\, 2x + C_3\, 3x^2 + C_4 4x^3 + \dots + C_m m x^{m-1}.$$

Durch Multiplication mit $1+x$ wird hieraus

2) $$m(1+x)^m$$

$$= 1C_1 + (2C_2 + 1C_1)x + (3C_3 + 2C_2)x^2 + (4C_4 + 3C_3)x^3 + \dots;$$

andererseits ist nach No. 1) und durch Multiplication mit m

3) $$m(1+x)^m$$

$$= m + mC_1 x + mC_2 x^2 + mC_3 x^3 + mC_4 x^4 + \dots$$

Die linken Seiten der Gleichungen 2) und 3) sind identisch, mithin müssen es auch die rechten Seiten sein; hierzu gehört nach §. 31, dafs gleiche Potenzen von x gleiche Coefficienten besitzen, dafs also folgende Gleichungen stattfinden:

$$1C_1 = m, \qquad 2C_2 + 1C_1 = mC_1, \qquad 3C_3 + 2C_2 = mC_2, \dots$$

hieraus ergeben sich der Reihe nach die Werthe der unbekannten Coefficienten C_1, C_2, C_3 etc., nämlich

$$C_1 = \frac{m}{1}, \qquad C_2 = C_1 \frac{m-1}{2} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2},$$

$$C_3 = C_2 \frac{m-2}{3} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3},$$

$$C_4 = C_3 \frac{m-3}{4} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4},$$

u. s. w.

Das Gesetz, nach welchem diese Coefficientenwerthe fortschreiten, ist leicht zu übersehen und spricht sich in folgender Formel aus

4) $$C_k = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-[k-1])}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots k};$$

durch Substitution der Coefficientenwerthe in No. 1) wird endlich

5) $$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}x^3 + \dots$$

Setzt man $x = \frac{b}{a}$ und multiplicirt beiderseits mit a^m, so entsteht die Formel

6) $$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}a^{m-3}b^3 + \dots;$$

diese enthält die allgemeine Regel, wonach jede zweitheilige Gröfse $a+b$ auf die m^{te} Potenz erhoben werden kann, vorausgesetzt, dafs m eine ganze positive Zahl ist. Die Gleichung 6) heifst daher **der binomische Satz** für ganze positive Exponenten.

Die hierin vorkommenden Coefficienten, welche anfangs provisorisch mit C_1, C_2, C_3, etc. bezeichnet wurden, nennt man **Binomialcoefficienten** und bezeichnet sie am zweckmäfsigsten*) durch $(m)_1$, $(m)_2$, $(m)_3$, etc., so dafs

7) $$(m)_k = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-[k-1])}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots k}$$

ist; statt der Formel 6) läfst sich dann kürzer schreiben

8) $$(a+b)^m = (m)_0 a^m + (m)_1 a^{m-1}b + (m)_2 a^{m-2}b^2 + \dots,$$

wobei der Symmetrie wegen $(m)_0$ für 1 gesetzt wurde.

Mittelst der Formeln 7) und 8) kann man nicht nur die ganze Entwickelung von $(a+b)^m$ ausführen, sondern auch jeden einzelnen Bestandtheil derselben, unabhängig von allen übrigen angeben. Wird z. B. verlangt, aus der Entwickelung von $(a+b)^{13}$ denjenigen Summanden herauszuheben, worin b^5 vorkommt, so hat man für diesen:

$$(13)_5\, a^8b^5 = \frac{13 \,.\, 12 \,.\, 11 \,.\, 10 \,.\, 9}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} a^8b^5 = 1287\, a^8b^5.$$

Da es nicht selten bequem ist, eine Tabelle der Binomialcoefficienten zur Hand zu haben, so wollen wir noch zeigen, wie eine solche leicht aufgestellt werden kann. Aus der Gleichung

$$(1+x)^m = (m)_0 + (m)_1 x + (m)_2 x^2 + (m)_3 x^3 + \dots$$

---

*) Die frühere, sehr schwerfällige Bezeichnung war $\overset{m}{{}^k\mathfrak{B}}$; später schrieb man, wie auch hie und da noch jetzt, $\left[\begin{smallmatrix} m \\ k \end{smallmatrix}\right]$; das letztere Zeichen wird aber unbequem, sobald m ein Bruch ist, was bei dem nachherigen allgemeinen binomischen Satze vorkommen kann.

folgt durch Multiplication mit $1 + x$

$$(1+x)^{m+1}$$
$$= (m)_0 + [(m)_0 + (m)_1]x + [(m)_1 + (m)_2]x^2 + [(m)_2 + (m)_3]x^3 + \cdots;$$

andererseits ist auch, wenn man in der vorhergehenden Gleichung $m+1$ für m setzt

$$(1+x)^{m+1}$$
$$= (m+1)_0 + (m+1)_1 x + (m+1)_2 x^2 + (m+1)_3 x^3 + \cdots,$$

folglich hat man durch Vergleichung beider Entwickelungen von $(1+x)^{m+1}$

$$(m)_0 = (m+1)_0, \quad (m)_0 + (m)_1 = (m+1)_1, \quad (m)_1 + (m)_2 = (m+1)_2,$$
$$(m)_2 + (m)_3 = (m+1)_3 \text{ u. s. w.}$$

Die erste dieser Gleichungen sagt nichts Neues, dagegen liegt in den übrigen, welche allgemein durch

9) $$(m)_{k-1} + (m)_k = (m+1)_k$$

ausgedrückt werden können, der Satz, dafs die Summe zweier benachbarten Binomialcoefficienten wieder einen Binomialcoefficienten giebt, welcher zum nächst höheren Exponenten gehört. Von den Werthen $(1)_0 = 1$ und $(1)_1 = 1$ ausgehend, bildet man hiernach leicht durch blofse Addition von je zwei in einer Horizontalreihe stehenden Zahlen die folgende Tabelle der Binomialcoefficienten:

m	$(m)_0$	$(m)_1$	$(m)_2$	$(m)_3$	$(m)_4$	$(m)_5$	$(m)_6$	$(m)_7$	$(m)_8$
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

u. s. w.

Noch erwähnen wir einige Eigenschaften der Binomialcoefficienten.

Setzt man in der Formel 8) einmal $a = 1$, $b = z$, das andere Mal $a = z$ und $b = 1$, so erhält man in beiden Fällen linker Hand dasselbe, folglich müssen auch die rechten Seiten gleich sein, d. h.

$$(m)_0 + (m)_1 z + (m)_2 z^2 + \cdots + (m)_{m-2} z^{m-2} + (m)_{m-1} z^{m-1} + (m)_m z^m$$
$$= (m)_0 z^m + (m)_1 z^{m-1} + (m)_2 z^{m-2} + \cdots$$
$$\cdots + (m)_{m-2} z^2 + (m)_{m-1} z + (m)_m.$$

Die Vergleichung der Coefficienten gleichnamiger Potenzen von z giebt

$$(m)_0 = (m)_m, \quad (m)_1 = (m)_{m-1}, \quad (m)_2 = (m)_{m-2}, \ldots$$

überhaupt

10) $$(m)_k = (m)_{m-k};$$

demnach sind diejenigen Binomialcoefficienten gleich, welche von Anfang und Ende gleich weit abstehen. Da in jedem Falle die Anzahl der Binomialcoefficienten $= m + 1$ ist, so folgt noch, dafs es bei geraden m einen mittelsten Binomialcoefficienten giebt, der nur einmal vorkommt, während bei ungeraden m jeder Coefficient zweimal vorhanden ist.

Die Gleichung 5) liefert für $x = +1$

11) $$2^m = (m)_0 + (m)_1 + (m)_2 + (m)_3 + \dots,$$

dagegen für $x = -1$

12) $$0 = (m)_0 - (m)_1 + (m)_2 - (m)_3 + \dots;$$

auch diese Relationen sind leicht in Worte zu fassen und mittelst der aufgestellten Tafel zu verificiren.

§. 36.

Die Convergenz der allgemeinen Binomialreihe.

Nachdem wir die Entwickelung von $(1 + x)^\mu$ für den Fall eines ganzen und positiven μ erledigt haben, wenden wir uns zu der allgemeineren Frage, ob eine ähnliche Entwickelung auch bei jedem anderen μ möglich ist. Wir betrachten defshalb die Reihe

1) $$1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \,.\, 2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^3 + \dots$$

und stellen uns die Aufgabe, ihre Summe zu finden.

Wenn nun μ keine ganze und positive Zahl ist, so geht die genannte Reihe ins Unendliche fort, und von einer Summirung derselben kann nicht eher die Rede sein, als ihre Convergenz aufser Zweifel steht; daher bedarf es erst einer Voruntersuchung über die Bedingungen, unter welchen die Reihe 1) convergirt oder divergirt.

Bezeichnen wir zur Abkürzung die Coefficienten von x, x^2, x^3 etc. wieder mit $(\mu)_1$, $(\mu)_2$, $(\mu)_3$ etc., so haben wir bei unendlich wachsenden n

$$Lim \frac{(\mu)_{n+1} x^{n+1}}{(\mu)_n x^n} = Lim \left\{\frac{\mu - n}{n+1} x\right\} = Lim \left\{-x + \frac{\mu+1}{n+1} x\right\} = -x,$$

und nach §. 29 convergirt oder divergirt die Reihe 1), jenachdem der absolute Werth von $-x$ weniger oder mehr als die Einheit beträgt. Der Fall $x^2 > 1$ ist daher sofort auszuschliefsen, und da für $x^2 < 1$ die Reihe convergirt, so haben wir nur noch die Fälle $x = +1$ und $x = -1$ zu betrachten.

Bei der ersten Voraussetzung $x = +1$ unterscheiden wir die Fälle eines positiven und eines negativen μ, wobei immer λ der absolute Werth von μ sein möge. Für $\mu = +\lambda$ geht die Reihe in die folgende über

$$2)\qquad 1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3} + \dots$$

und da λ keine ganze Zahl ist, so giebt es immer zwei aufeinander folgende ganze positive Zahlen $k-1$ und k, zwischen denen λ liegt, Die vorstehende Reihe läfst sich nun in die Form bringen

$$1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-[k-1])}{1.2.3\dots.k}$$
$$- \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-[k-1])(k-\lambda)}{1.2.3\dots.k(k+1)}$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-[k-1])(k-\lambda)(k+1-\lambda)}{1.2.3\dots.k(k+1)(k+2)}$$
$$- \dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= 1 + (\lambda)_1 + (\lambda)_2 + \dots\dots + (\lambda)_{k-1}$$
$$+ (\lambda)_k \left\{1 - \frac{k-\lambda}{k+1} + \frac{(k-\lambda)(k-\lambda+1)}{(k+1)(k+2)} - \frac{(k-\lambda)(k-\lambda+1)(k-\lambda+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \dots\right\};$$

sie zerfällt demnach in zwei Theile, von denen der erste eine endliche Reihe von k Gliedern bildet, während der zweite eine unendliche Reihe mit alternirenden Vorzeichen enthält. Die letztere Reihe convergirt unbedingt, wenn die Reihe ihrer absoluten Werthe

$$1 + \frac{k-\lambda}{k+1} + \frac{(k-\lambda)(k-\lambda+1)}{(k+1)(k+2)} + \frac{(k-\lambda)(k-\lambda+1)(k-\lambda+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \dots$$

convergirt; diefs ist aber nach §. 27 der Fall, mithin findet die Convergenz der Reihe 2) für jedes endliche λ statt.

Wenn zweitens (unter der Voraussetzung $x = +1$) $\mu = -\lambda$ ist, so wird die Reihe 1) zur folgenden

$$3)\qquad 1 - \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2} - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2.3} + \dots,$$

welche nur für $\lambda < 1$ convergiren kann, weil für $\lambda = 1$ die Glieder einander gleich werden und für $\lambda > 1$ eine steigende Reihe bilden. Ist nun $\lambda < 1$, so hat man

$$1 > \frac{\lambda+n}{n+1},$$

daher

$$\frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)}{1.2\dots n} > \frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)(\lambda+n)}{1.2\dots.n(n+1)},$$

mithin beträgt jedes Reihenglied mehr als das darauf folgende; zur Convergenz gehört aber noch, dafs für $n = \infty$

$$Lim \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n} = 0$$

sei. In der That ist diefs nach §. 23 Formel 2) der Fall, wenn λ weniger als die Einheit beträgt; hieraus folgt, dafs die Reihe 3) für $\lambda < 1$ convergirt.

Auch im zweiten Hauptfalle $x = -1$ unterscheiden wir, ob μ positiv oder negativ ist. Für $\mu = +\lambda$ haben wir die Reihe

$$4) \qquad 1 - \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

welche sich unter der Voraussetzung, dafs λ zwischen $k-1$ und k liegt, auf dieselbe Weise wie die Reihe 2) zerlegen läfst in

$$1 - (\lambda)_1 + (\lambda)_2 - \ldots\ldots \pm (\lambda)_{k-1}$$

$$\mp (\lambda)_k \left\{ 1 + \frac{k-\lambda}{k+1} + \frac{(k-\lambda)(k-\lambda+1)}{(k+1)(k+2)} + \frac{(k-\lambda)(k-\lambda+1)(k-\lambda+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \ldots \right\}.$$

Wie schon bei Gelegenheit des Falles $x = +1$, $\mu = -\lambda$ gezeigt worden ist, convergirt die letzte Reihe für jedes endliche λ; dasselbe gilt auch von der Reihe 4).

Endlich erhalten wir unter der Voraussetzung $x = -1$, $\mu = -\lambda$ die Reihe

$$5) \qquad 1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2} + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

und diese divergirt für jedes $\lambda > 0$, wie das in §. 27 entwickelte Kennzeichen lehrt. Durch Zusammenfassung aller bisherigen Ergebnisse gelangen wir zu folgendem Satze:

Die unendliche Reihe

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

convergirt für jedes endliche μ, wenn der absolute Werth von x weniger als die Einheit beträgt; ist dagegen $x = +1$, so mufs μ zwischen -1 und $+\infty$ liegen, und ist $x = -1$, so mufs μ positiv sein, wenn die Reihe convergiren soll.

§. 37.

Der allgemeine binomische Satz.

Unter der Voraussetzung, dafs die vorhin betrachtete Reihe convergirt, läfst sich deren Summe als eine noch unbekannte Function der Variabelen μ betrachten und demgemäfs mit $f(\mu)$ bezeichnen; zugleich wollen wir die Abkürzung

$$(\mu)_k = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[k-1])}{1.2.3\ldots.k}$$

einführen und daher

$$1) \qquad f(\mu) = (\mu)_0 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + (\mu)_3 x^3 + \ldots\ldots$$

setzen. Für ein ganzes und positives μ kennen wir bereits die Summe der Reihe, nämlich $f(\mu) = (1+x)^\mu$; es fragt sich daher, ob man den Fall eines gebrochenen oder negativen μ auf den vorigen Fall zurückführen kann. Hierzu dienen folgende Betrachtungen.

Entsprechend der Gleichung 1) ist, wenn wir für μ das eine Mal α, das andere Mal β setzen,

$$f(\alpha) = (\alpha)_0 + (\alpha)_1 x + (\alpha)_2 x^2 + (\alpha)_3 x^3 + \ldots\ldots,$$
$$f(\beta) = (\beta)_0 + (\beta)_1 x + (\beta)_2 x^2 + (\beta)_3 x^3 + \ldots\ldots;$$

vorausgesetzt, dafs beide Reihen unbedingt convergiren, dürfen wir auf gewöhnliche Weise multipliciren und erhalten dadurch ein Resultat von der Form

$$2) \qquad f(\alpha) \cdot f(\beta) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots\ldots$$

worin die neuen Coefficienten c_0, c_1, c_2 etc. durch folgende Gleichungen bestimmt sind

$$c_0 = (\alpha)_0(\beta)_0,$$
$$c_1 = (\alpha)_0(\beta)_1 + (\alpha)_1(\beta)_0,$$
$$c_2 = (\alpha)_0(\beta)_2 + (\alpha)_1(\beta)_1 + (\alpha)_2(\beta)_0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

d. i. allgemein

$$3) \quad c_n = (\alpha)_0(\beta)_n + (\alpha)_1(\beta)_{n-1} + (\alpha)_2(\beta)_{n-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (\alpha)_{n-2}(\beta)_2 + (\alpha)_{n-1}(\beta)_1 + (\alpha)_n(\beta)_0$$

und ebenso

$$4) \quad c_{n+1} = (\alpha)_0(\beta)_{n+1} + (\alpha)_1(\beta)_n + (\alpha)_2(\beta)_{n-1} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (\alpha)_{n-1}(\beta)_2 + (\alpha)_n(\beta)_1 + (\alpha)_{n+1}(\beta)_0.$$

Um c_n kürzer ausdrücken zu können, stellen wir folgende identische Gleichungen auf

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha+\beta-n}{n+1} &= \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta-n}{n+1}, \\
&= \frac{\alpha-1}{n+1} + \frac{\beta-(n-1)}{n+1}, \\
&= \frac{\alpha-2}{n+1} + \frac{\beta-(n-2)}{n+1}, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \frac{\alpha-(n-2)}{n+1} + \frac{\beta-2}{n+1}, \\
&= \frac{\alpha-(n-1)}{n+1} + \frac{\beta-1}{n+1}, \\
&= \frac{\alpha-n}{n+1} + \frac{\beta}{n+1},
\end{aligned}$$

hiermit multipliciren wir die Gleichung 3) und benutzen rechter Hand bei der Multiplication des ersten Summanden die erste Form, beim zweiten die zweite Form u. s. w.; diefs giebt

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha+\beta-n}{n+1} c_n = & \frac{\alpha}{n+1} (\alpha)_0(\beta)_n + \frac{\beta-n}{n+1} (\alpha)_0(\beta)_n \\
& + \frac{\alpha-1}{n+1} (\alpha)_1(\beta)_{n-1} + \frac{\beta-(n-1)}{n+1} (\alpha)_1(\beta)_{n-1} \\
& + \frac{\alpha-2}{n+1} (\alpha)_2(\beta)_{n-2} + \frac{\beta-(n-2)}{n+1} (\alpha)_2(\beta)_{n-2} \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\alpha-(n-1)}{n+1} (\alpha)_{n-1}(\beta)_1 + \frac{\beta-1}{n+1} (\alpha)_{n-1}(\beta)_1 \\
& + \frac{\alpha-n}{n+1} (\alpha)_n(\beta)_0 + \frac{\beta}{n+1} (\alpha)_n(\beta)_0 .
\end{aligned}$$

Zufolge der Definition von $(\mu)_k$ ist

$$\frac{\mu-k}{k+1}(\mu)_k = (\mu)_{k+1} \quad \text{oder} \quad (\mu-k)(\mu)_k = (k+1)(\mu)_{k+1};$$

diese Formel kann man auf jeden einzelnen der vorigen Summanden anwenden und zwar in der ersten Verticalreihe für $\mu=\alpha$, $k=0, 1, 2, \ldots n$, in der zweiten Reihe für $\mu=\beta$, $k=n, n-1, \ldots 1, 0$; man erhält

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\, c_n = & \frac{1}{n+1}(\alpha)_1(\beta)_n + (\alpha)_0(\beta)_{n+1} \\ & + \frac{2}{n+1}(\alpha)_2(\beta)_{n-1} + \frac{n}{n+1}(\alpha)_1(\beta)_n \\ & + \frac{3}{n+1}(\alpha)_3(\beta)_{n-2} + \frac{n-1}{n+1}(\alpha)_2(\beta)_{n-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{n}{n+1}(\alpha)_n(\beta)_1 + \frac{2}{n+1}(\alpha)_{n-1}(\beta)_2 \\ & + \qquad (\alpha)_{n+1}(\beta)_0 + \frac{1}{n+1}(\alpha)_n(\beta)_1\end{aligned}$$

und durch Zusammenfassung der in diagonaler Richtung vorkommenden gleichartigen Summanden

$$\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\, c_n$$
$$= (\alpha)_0(\beta)_{n+1} + (\alpha)_1(\beta)_n + (\alpha)_2(\beta)_{n-1} + \cdots + (\alpha)_n(\beta)_1 + (\alpha)_{n+1}(\beta)_0 .$$

Die rechte Seite ist nach Formel 4) identisch mit c_{n+1}, und daher bei umgekehrter Anordnung

$$c_{n+1} = c_n\,\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}$$

Man kennt unmittelbar den Anfangscoefficienten $c_0 = (\alpha)_0(\beta)_0 = 1$, mithin läſst sich die vorstehende Gleichung benutzen, um der Reihe nach c_1, c_2, c_3, etc. zu bestimmen, indem man successiv $n = 0$, 1, 2 etc. setzt; dieſs giebt

$$\begin{aligned} c_1 &= c_0\,\frac{\alpha+\beta}{1} = \frac{\alpha+\beta}{1}, \\ c_2 &= c_1\,\frac{\alpha+\beta-1}{2} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1\,.\,2}, \\ c_3 &= c_2\,\frac{\alpha+\beta-2}{3} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{1\,.\,2\,.\,3}, \end{aligned}$$

u. s. w.

Nach Substitution der Coefficientenwerthe nimmt die Gleichung 2) folgende Form an

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)$$
$$= 1 + \frac{\alpha+\beta}{1}\,x + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1\,.\,2}\,x^2$$
$$+ \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \ldots;$$

die rechte Seite ist hier nach demselben Gesetze wie die Reihe für

$f(\mu)$ gebildet, wenn man sich $\alpha+\beta$ an die Stelle von μ gesetzt denkt, mithin ist

$$5) \qquad f(\alpha)\cdot f(\beta)=f(\alpha+\beta).$$

Bevor wir zeigen, wie sich aus dieser Eigenschaft der Function f die Form der letzteren bestimmen läſst, wollen wir erst die Frage nach der Continuität der gesuchten Reihensumme discutiren. Da die Summe jeder Potenzenreihe innerhalb der Grenzen der Convergenz eine stetige Function derjenigen Variabelen darstellt, nach deren Potenzen die Reihe fortschreitet, so ist die Summe der Reihe

$$1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\dots$$

eine stetige Function von x, solange die Convergenz der Reihe stattfindet, also z. B. für jedes μ, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt. Um zweitens zu entscheiden, ob die genannte Summe auch eine continuirliche Function von μ bildet, nehmen wir in der Gleichung 5) $\alpha=\mu-\varepsilon$, $\beta=\delta+\varepsilon$ und erhalten

$$f(\mu-\varepsilon)\cdot f(\delta+\varepsilon)=f(\mu+\delta),$$

oder umgekehrt

$$\frac{f(\mu+\delta)}{f(\mu-\varepsilon)}=f(\delta+\varepsilon)=1+(\delta+\varepsilon)\,x\left\{1+\frac{\delta+\varepsilon-1}{2}x+\dots\right\}$$

Die eingeklammerte Reihe convergirt, wenn $\delta+\varepsilon$ und x denselben Bedingungen unterworfen werden wie früher μ und x; hieraus folgt, indem man δ und ε gleichzeitig der Null immer näher kommen läſst,

$$Lim\frac{f(\mu+\delta)}{f(\mu-\varepsilon)}=1.$$

Ferner ist, wie man leicht bemerkt,

$$Lim\left\{lf(\mu+\delta)-lf(\mu-\varepsilon)\right\}=0,$$

die Function $lf(\mu)$ erleidet also nirgends eine Unterbrechung der Continuität, mithin ändert sich auch $e^{lf(\mu)}$ d. h. $f(\mu)$ continuirlich, solange die Reihe convergirt. Diese Sätze zusammen führen zu dem Resultate, daſs die Summe der betrachteten Reihe innerhalb des Convergenzintervalles eine stetige Function von x und μ ist.

Wir kehren nun zur Gleichung 5) zurück. Nehmen wir darin zuerst $\alpha=\beta=\mu$, so erhalten wir

$$[f(\mu)]^2=f(2\mu);$$

diese Gleichung multipliciren wir mit $f(\mu)$ und wenden rechter Hand wieder die Formel 5) für $\alpha=2\mu$ und $\beta=\mu$ an; dieſs giebt

$$[f(\mu)]^3=f(3\mu).$$

Auf gleiche Weise gelangen wir durch nochmalige Multiplication mit $f(\mu)$ zu der Relation

$$[f(\mu)]^4 = f(4\mu);$$

so fortgehend, erhalten wir überhaupt für jedes ganze positive k

$$[f(\mu)]^k = f(k\mu).$$

Ist nun μ ein positiver Bruch $= \frac{p}{q}$, worin p und q ganze positive Zahlen bedeuten, so können wir die willkürliche ganze positive Zahl k gleich dem Nenner q nehmen und haben dann

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f(p);$$

wegen des ganzen positiven p ist der Werth von $f(p)$ bekannt und zwar $= (1+x)^p$, mithin

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = (1+x)^p \quad \text{oder} \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = (1+x)^{\frac{p}{q}}.$$

Die Frage, welcher von den möglichen verschiedenen Werthen des Ausdrucks $(1+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+x)^p}$ hier gelten soll, entscheidet sich durch die einfache Bemerkung, dafs die Function $f(\mu)$, gemäfs ihrer in No. 1) gegebenen Definition, für $x = 0$ den Specialwerth 1 erhalten mufs; es ist daher $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ im absoluten Sinne zu nehmen.

Da jede rationale positive Zahl λ entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch sein mufs, so lassen sich die beiden Gleichungen

$$f(m) = (1+x)^m \quad \text{und} \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = (1+x)^{\frac{p}{q}}$$

zusammenfassen, indem man sagt: für jedes positive und rationale λ ist

$$f(\lambda) = (1+x)^\lambda.$$

Um diese Gleichung auf positive Irrationalzahlen auszudehnen, genügt die Bemerkung, dafs man ein irrationales μ mit jedem beliebigen Genauigkeitsgrade durch rationale Brüche λ (Decimalbrüche) darstellen, d. h. den Unterschied zwischen μ und λ beliebig klein machen kann. Aus No. 5) folgt nun für $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu - \lambda$

$$\begin{aligned} f(\mu) &= f(\lambda) \cdot f(\mu - \lambda) \\ &= (1+x)^\lambda \left\{1 + \frac{\mu - \lambda}{1} x + \frac{(\mu - \lambda)(\mu - \lambda - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots \right\} \end{aligned}$$

oder kurz

$$f(\mu) = (1+x)^\lambda \left\{1 + (\mu - \lambda) x S \right\},$$

wo S die Summe einer convergirenden Reihe, mithin eine endliche

Gröfse bedeutet; da die Differenz $\mu - \lambda$ kleiner als jede angebbare Zahl gemacht werden kann, so nähert sich λ der Grenze μ, der Factor $1 + (\mu - \lambda)\, S$ der Grenze 1, und die rechte Seite der Grenze $(1 + x)^\mu$. Man hat daher für jedes positive μ

$$f(\mu) = (1 + x)^\mu. \tag{6}$$

Aus der Gleichung 5) folgt endlich für $\alpha = \mu$ und $\beta = -\mu$

$$f(-\mu) = \frac{f(0)}{f(\mu)} = \frac{1}{(1 + x)^\mu} = (1 + x)^{-\mu},$$

mithin gilt die Formel 6) auch für negative μ.

Durch Zusammenfassung der bisherigen Resultate gelangen wir zu folgendem Satze:

Bei ganzen positiven μ gilt die Formel

$$(1 + x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 . 2} x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 . 2 . 3} x^3 + \dots . \tag{7}$$

für jedes reelle x; ist dagegen μ nicht ganz und positiv, so mufs im Allgemeinen x zwischen -1 und $+1$ liegen. Für $x = +1$ bleibt die Gleichung nur unter der Bedingung $-1 < \mu < +\infty$ richtig und im Falle $x = -1$ darf μ nur positive Werthe erhalten.

Des späteren Gebrauchs wegen erwähnen wir einige specielle Fälle der Formel 7). Für $\mu = -2$ wird

$$\frac{1}{(1 + x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots,$$
$$-1 < x < +1;$$

für $\mu = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 . 3}{2 . 4} x^2 - \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} x^3 + \dots,$$
$$-1 < x < +1;$$

für $\mu = +\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1 . 3}{2 . 4}\frac{x^3}{6} - \dots,$$
$$- \leqq x \leqq +1;$$

aus der letzten Gleichung folgt noch durch Anwendung einer bekannten Formel

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^3}{6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\frac{x^5}{10} + \cdots\cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Ist die μ^{te} Potenz einer zweitheiligen Gröfse zu entwickeln, so nenne man a denjenigen Theil, welcher den gröfseren absoluten Werth hat, nehme in No. 7) $x = \frac{b}{a}$ und multiplicire beiderseits mit a^μ; die entstehende Formel

$$8) \quad (a+b)^\mu = a^\mu + \frac{\mu}{1}a^{\mu-1}b + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}a^{\mu-2}b^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{\mu-3}b^3 + \ldots,$$
$$a^2 > b^2,$$

heifst der allgemeine binomische Satz*).

§. 38.

Der Rest der Binomialreihe. Anwendungen.

Wie in §. 36 zerlegen wir die binomische Reihe in zwei Theile, deren erster aus k Anfangsgliedern besteht, und deren zweiter alle folgenden Glieder enthält; wir setzen demgemäfs

$$1) \quad (1+x)^\mu = (\mu)_0 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + (\mu)_3 x^3 + \cdots\cdots \cdots\cdots + (\mu)_{k-1}x^{k-1} + R_k,$$

wo R_k der Rest der Reihe ist, nämlich

$$2) \quad R_k = (\mu)_k x^k \left\{1 + \frac{\mu-k}{k+1}x + \frac{(\mu-k)(\mu-k-1)}{(k+1)(k+2)}x^2 + \cdots\right\}$$

Wir untersuchen nun folgende Fälle.

a. Es sei μ eine ganze positive Zahl $= m$. Selbstverständlich ist dann $k < m$, und wenn wir gleichzeitig x als positiv voraussetzen, so beträgt die Summe der Reihe

$$1 + \frac{m-k}{k+1}x + \frac{(m-k)(m-k-1)}{(k+1)(k+2)}x^2 + \cdots$$

mehr als Null, aber weniger als

$$1 + \frac{m}{k}x + \frac{m^2}{k^2}x^2 + \frac{m^3}{k^3}x^3 + \cdots;$$

*) Die Allgemeingültigkeit des binomischen Satzes hat Newton entdeckt (Brief an Leibnitz v. 13. Juni 1676); der oben gegebene Beweis rührt im Wesentlichen von Euler her (*Novi Comment. Petropol.* T. XIX, p. 103) und ist von Cauchy vervollständigt worden (*Cours d'analyse algèbr.* p. 164).

diese Reihe bildet eine geometrische Progression, deren letztes Glied $\left(\frac{m}{k}x\right)^{m-k}$ ist, deren Summe also durch

$$\frac{1-\left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1-\frac{mx}{k}}$$

dargestellt wird. Der Rest R_k liegt demnach zwischen Null und

$$(\mu)_k x^k \frac{1-\left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1-\frac{mx}{k}}$$

oder es ist, wenn ϱ einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch bedeutet,

$$4) \qquad R_k = \varrho\,(\mu)_k x^k \frac{1-\left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1-\frac{mx}{k}}, \qquad 0 < \varrho < 1.$$

Bei negativen x ändert sich nur wenig an diesen Schlüssen. Bezeichnen wir nämlich den absoluten Werth einer Zahl z mit $[z]$, so liegt die Summe der Reihe 3) zwischen

$$-\left\{1+\left[\frac{m}{k}x\right]+\left[\frac{m}{k}x\right]^2+\dots\right\}$$

und

$$+\left\{1+\left[\frac{m}{k}x\right]+\left[\frac{m}{k}x\right]^2+\dots\right\};$$

hieraus ersieht man leicht, dafs R_k unter folgender Form dargestellt werden kann

$$5) \qquad R_k = \varrho\,(\mu)_k x^k \frac{1-\left[\frac{mx}{k}\right]^{m-k+1}}{1-\left[\frac{mx}{k}\right]}, \qquad -1 < \varrho < +1.$$

Die Formeln 4) und 5) lassen sich zu einer einzigen zusammenziehen, welche äufserlich mit der letzten übereinstimmt; man hat dabei nur zu merken, dafs bei positiven x auch ϱ positiv sein mufs.

In dem speciellen Falle, wo $\frac{mx}{k}$ ein echter Bruch ist, hat man

$$1-\left[\frac{mx}{k}\right]^{m-k+1} < 1;$$

durch Multiplication dieses Zählers mit ϱ entsteht ein kleinerer echter Bruch, welcher ϱ' heifsen möge, und daher wird einfacher

6) $$R_k = \frac{\varrho' (m)_k x^k}{1 - \left[\frac{mx}{k}\right]},$$

$$-1 < \varrho' < +1, \quad 0 < mx < k.$$

Auch hier entspricht einem positiven x ein positives ϱ'.

Als Beispiel diene die Aufgabe, in Ermangelung gröſserer logarithmischer Tafeln den Werth von

$$(1{,}00000\,00007)^{1000000}$$

auf 10 Decimalstellen genau zu berechnen. Hier ist

$$x = \frac{7}{10^{10}}, \quad m = 10^6, \quad mx = \frac{7}{10^4} < 1,$$

$$R_1 = \varrho' \, . \, 0{,}0007\ldots, \quad R_2 = \varrho' \, . \, 0{,}000000245\ldots,$$
$$R_3 = \varrho' \, . \, 0{,}00000\,0000057\ldots$$

woraus man ersieht, daſs für die verlangte Genauigkeit k mindestens $= 3$ genommen werden muſs; dieſs giebt

$$(1{,}00000\,00007)^{1000000} = 1{,}00070\,024505\ldots.$$

b. Es sei zweitens μ eine positive aber keine ganze Zahl; die binomische Reihe geht dann in's Unendliche fort und convergirt unter der Bedingung $-1 \leqq x \leqq +1$. Dasselbe gilt von der Reihe in No. 2); wir nehmen dann die willkürliche ganze positive Zahl $k > \mu$ und unterscheiden die Fälle eines positiven und eines negativen x nämlich $x = +\xi$ und $x = -\xi$. Im ersten Falle wird die erwähnte Reihe

7) $$1 - \frac{k-\mu}{k+1}\xi + \frac{(k-\mu)(k-\mu+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^2 - \ldots.$$

und im zweiten Falle

8) $$1 + \frac{k-\mu}{k+1}\xi + \frac{(k-\mu)(k-\mu+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^2 + \ldots.$$

Da die Factoren

$$\frac{k-\mu}{k+1}, \quad \frac{k-\mu+1}{k+2}, \quad \frac{k-\mu+2}{k+3}, \ldots.$$

positive echte Brüche sind und ξ unter der Voraussetzung $-1 < x < +1$ gleichfalls ein positiver echter Bruch ist, so beträgt in den Reihen 7) und 8) jedes Glied mehr als das folgende; die Summe der Reihe 7) liegt daher zwischen 1 und $1 - \frac{k-\mu}{k+1}\xi$ und ist folglich positiv; ebenso erhellt unmittelbar, daſs die Summe der Reihe 8) positiv sein muſs. Ferner beträgt die Summe der ersten Reihe weniger als die der zweiten und die letztere ist wiederum kleiner als

$$1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \ldots = \frac{1}{1-\xi}.$$

Denkt man sich zwischen ξ und 1 noch einen beliebigen echten Bruch ε eingeschaltet ($\xi < \varepsilon < 1$), so ist

$$\frac{1}{1-\xi} < \frac{1}{1-\varepsilon};$$

die Summe jeder der Reihen 7) und 8) liegt nun zwischen 0 und $\frac{1}{1-\varepsilon}$, man kann also beide Summen unter der gemeinschaftlichen Form $\frac{\varrho}{1-\varepsilon}$ darstellen, wenn man unter ϱ einen nicht näher bestimmbaren positiven echten Bruch versteht. Für den Rest ergiebt sich hiernach die Formel

$$9) \qquad R_k = \frac{\varrho (\mu)_k x^k}{1-\varepsilon},$$

$$[x] < \varepsilon < +1, \qquad k > \mu, \qquad 0 < \varrho < 1,$$

wo $[x]$ den absoluten Werth von x bezeichnet.

Diese Schlufsweise verliert ihre Anwendbarkeit im Falle $x = \pm 1$ d. h. für $\xi = 1$, doch bleibt die anfängliche Bemerkung noch richtig, dafs die Summe der Reihe 7) positiv und kleiner als die Summe der Reihe 8) ist. Nach Formel 3) in §. 23 hat man ferner für $a = k + 1$, $b = k - \mu$, wobei die Bedingung $a - 1 > b > 0$ erfüllt ist,

$$1 + \frac{k-\mu}{k+1} + \frac{(k-\mu)(k-\mu+1)}{(k+1)(k+2)} + \ldots = \frac{k}{\mu},$$

mithin kann man die Summen der Reihen 7) und 8) für $\xi = 1$ unter der gemeinschaftlichen Form $\varrho \frac{k}{\mu}$ darstellen; für den Rest folgt hieraus

$$10) \qquad R_k = \varrho (\mu - 1)_{k-1} (\pm 1)^k$$

$$k > \mu, \qquad 0 < \varrho < 1.$$

c. Drittens sei μ negativ $= -\lambda$; die Reihe in No. 2) wird dann bei positiven x zur folgenden

$$11) \qquad 1 - \frac{k+\lambda}{k+1}\xi + \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^2 - \ldots.$$

dagegen bei negativen x

$$12) \qquad 1 + \frac{k+\lambda}{k+1}\xi + \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^2 + \ldots.$$

Da sich der Ausdruck $\frac{k+\lambda}{k+1}\xi$ für unendlich wachsende k der Grenze ξ nähert, so kann man, falls $\xi < 1$ ist, k so grofs wählen, dafs

$$\frac{k+\lambda}{k+1}\xi < \varepsilon$$

ist, wo ε einen zwischen ξ und 1 eingeschalteten echten Bruch bezeichnet. Aus der vorstehenden Ungleichung folgt in der That

$$k > \frac{\lambda\xi - \varepsilon}{\varepsilon - \xi},$$

und diese Bedingung läfst sich immer erfüllen. Ist diefs geschehen, so hat man um so mehr

$$k + 1 > \frac{\lambda\xi - \varepsilon}{\varepsilon - \xi}, \qquad k + 2 > \frac{\lambda\xi - \varepsilon}{\varepsilon - \xi}$$

oder

$$\frac{k + \lambda + 1}{k + 2}\xi < \varepsilon, \qquad \frac{k + \lambda + 2}{k + 3} < \varepsilon, \; \ldots .$$

mithin

$$\frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^2 < \varepsilon^2, \quad \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)(k+\lambda+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)}\xi^3 < \varepsilon^3$$

u. s. w.

Die Summen der Reihen 11) und 12) sind hiernach positiv und kleiner als

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots = \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

sie können daher unter der gemeinschaftlichen Form $\frac{\varrho}{1 - \varepsilon}$ dargestellt werden; für den Rest ergiebt sich nun

13) $$R_k = \frac{\varrho(\mu)_k x^k}{1 - \varepsilon},$$

$$[x] < \varepsilon < 1, \quad k > \frac{[\mu x] - \varepsilon}{\varepsilon - [x]}, \quad 0 < \varrho < 1.$$

Im Falle $x = \pm 1$ d. h. $\xi = 1$ verlieren diese Schlüsse ihre Anwendbarkeit und sind durch folgende Bemerkungen zu ersetzen. Für $x = +1$ d. h. in No. 11) mufs (nach No. 7) in §. 37 $\mu > -1$ mithin $\lambda < 1$ sein; die Ausdrücke

$$\frac{k + \lambda}{k + 1}, \quad \frac{k + \lambda + 1}{k + 2}, \quad \frac{k + \lambda + 2}{k + 3}, \ldots$$

sind dann bei jedem k echte Brüche, folglich liegt die Summe der Reihe 11) für $\xi = 1$ zwischen 1 und $1 - \frac{k + \lambda}{k + 1}$, ist also ein echter Bruch ϱ, woraus sich für den Rest die Formel

14) $$R_k = \varrho(\mu)_k, \qquad 0 < \varrho < 1$$

ergiebt. Für $x = -1$ darf μ überhaupt keine negativen Werthe erhalten, in der Reihe 12) kann also der Fall $\xi = 1$ gar nicht vorkommen.

Durch Zusammenfassung der gewonnenen Resultate erhalten wir folgendes Theorem:

Wenn μ keine ganze positive Zahl und x zwischen -1 und $+1$ enthalten ist, so gilt für den Rest der Binomialreihe die allgemeine Formel

15) $$R_k = \frac{\varrho\,(\mu)_k x^k}{1-\varepsilon},$$

$$[x] < \varepsilon < 1, \qquad 0 < \varrho < 1;$$

bei positiven μ ist hier $k > \mu$ zu nehmen, bei negativen μ dagegen

$$k > \frac{[\mu x] - 1}{\varepsilon - [x]}.$$

Für die Specialfälle $x = \pm 1$ gelten die besonderen Formeln 10) und 14).

Wenn x positiv ist, kann der Rest noch einfacher ausgedrückt werden. Die Reihen 7) und 10), welche dieser Voraussetzung entsprechen, haben nämlich alternirende Vorzeichen und in jeder ist irgend ein Reihenglied gröfser als das darauf folgende, wenn in No. 7) $k > \mu$ und in No. 10)

$$k > \frac{\lambda\xi - 1}{1 - \xi}$$

genommen wird. Die Summe der Reihe 7) liegt daher zwischen

$$1 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{k-\mu}{k+1}\xi,$$

sie ist folglich ein positiver echter Bruch, welcher ϱ heifsen möge; die gleiche Bemerkung gilt für die Reihe 10) und daher haben wir in beiden Fällen die einfache Formel

$$R_k = \varrho\,(\mu)_k x^k, \quad 0 < \varrho < 1,$$

wobei k wie vorhin zu wählen ist. Man kann diefs auch so ausdrücken: Wenn bei positiven x die Binomialreihe soweit fortgesetzt wird, dafs sie abnehmende Glieder mit alternirenden Vorzeichen erhält, so beträgt der Rest immer einen Bruchtheil desjenigen Reihengliedes, welches auf das zuletzt genommene folgen würde.

d. Mit Beachtung des Restes kann man den binomischen Satz zur Ausziehung von Wurzeln beliebig hoher Grade benutzen. Ist nämlich aus z die m^{te} Wurzel zu ziehen, so zerlegt man z so in zwei Theile a und b, dafs a die zunächst an z liegende Zahl bedeutet, deren m^{te} Wurzel rational angebbar ist; man hat dann

$$\sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{a+b} = \sqrt[m]{a\left(1+\frac{b}{a}\right)} = \sqrt[m]{a}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}},$$

wo nun $\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$ nach dem binomischen Satze entwickelt werden kann. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{129}=\sqrt[3]{125+4}=5\left(1+\frac{4}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=5\left\{1+\frac{1}{3}\frac{4}{125}-\frac{2}{3\,.\,6}\left(\frac{4}{125}\right)^2+\frac{2\,.\,5}{3\,.\,6\,.\,9}\left(\frac{4}{125}\right)^3-\cdots\cdots\right\};$$

schreibt man kurz

$$\sqrt[3]{129}=u_0+u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots,$$

so ist die Rechnung folgende

$$u_0+u_1=5+\frac{16}{3\,.\,100} \qquad =5{,}05333\,33333$$

$$u_2=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{125}u_1=\frac{32}{3\,.\,1000}u_1 \qquad =0{,}00056\,88889\ (-)$$

$$5{,}05276\,44444$$

$$u_3=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{125}u_2=\frac{16}{9\,.\,100}u_2 \qquad =0{,}00001\,01136\ (+)$$

$$5{,}05277\,45580$$

$$u_4=\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{125}u_3=\frac{64}{3\,.\,1000}u_3 \qquad =0{,}00000\,02158\ (-)$$

$$5{,}05277\,43422$$

u. s. w.

und wegen der alternirenden Vorzeichen liegt die gesuchte Wurzel immer zwischen zwei aufeinander folgenden Werthen.

§. 39.

Eigenschaften der Binomialcoefficienten.

In §. 37 wurde gefunden, dafs die Summe der endlichen Reihe

$$(\alpha)_0(\beta)_n+(\alpha)_1(\beta)_{n-1}+(\alpha)_2(\beta)_{n-2}+\cdots+(\alpha)_{n-1}(\beta)_1+(\alpha)_n(\beta)_0$$

durch

$$c_n=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\ldots(\alpha+\beta-[n-1])}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,n}$$

ausgedrückt werden kann, mithin wieder ein Binomialcoefficient ist. Diese Fundamentaleigenschaft der Binomialcoefficienten stellen wir in der Gleichung dar

$$1)\qquad (\alpha)_0(\beta)_n+(\alpha)_1(\beta)_{n-1}+(\alpha)_2(\beta)_{n-2}+\cdots+(\alpha)_n(\beta)_0 =(\alpha+\beta)_n$$

und benutzen sie zur Ableitung anderweiter Relationen zwischen Binomialcoefficienten

Analog $(m)_p$ bezeichnet $\left(\frac{m}{2}\right)_p$ den Coefficienten von x^p in der Entwickelung von $(1+x)^{\frac{1}{2}m}$, und zwar ist

$$\left(\frac{m}{2}\right)_p = \frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)\left(\frac{m}{2}-3\right)\cdots\left(\frac{m}{2}-p+1\right)}{1.2.3\ldots p}$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit 2^p, so erhält man leicht

$$2)\qquad \left(\frac{m}{2}\right)_p = \frac{m(m-2)(m-4)(m-6)\ldots(m-2p+2)}{2.4.6\ldots(2p)}.$$

Von diesen Coefficienten halber Exponenten gelten mehrere brauchbare Relationen, welche auf folgende Weise entstehen.

a. Sei μ eine ganz beliebige Gröfse, n eine positive ganze Zahl und folgende Reihe

$$3)\qquad (\mu)_0\left(\frac{\mu}{2}\right)_n + (\mu)_2\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_{n-1} + (\mu)_4\left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + (\mu)_{2n-2}\left(\frac{\mu-2n+2}{2}\right)_1 + (\mu)_{2n}\left(\frac{\mu-2n}{2}\right)_0$$

mit der Forderung gegeben, ihre Summe aufzufinden. Bezeichnet r eine ganze positive Zahl, so ist ein beliebig aus der Reihe herausgegriffener Summand von der Form

$$4)\qquad (\mu)_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r}$$

und die Reihe selbst entsteht dadurch, dafs man successive $r = 0$, $1, 2, 3, \ldots n$ setzt und alle hervorgehenden Gröfsen addirt. Entwickelt man den Werth jedes Factors, so erhält man

$$(\mu)_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r}$$
$$= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-2r+1)}{1.2.3\ldots(2r)} \cdot \frac{(\mu-2r)(\mu-2r-2)\ldots(\mu-2n+2)}{2.4.6\ldots(2n-2r)}$$

Im Zähler bilden diejenigen Factoren, in welchen gerade Zahlen subtrahirt werden, nämlich

$$\mu,\ \mu-2,\ \mu-4,\ \ldots\ \mu-2r+2 \text{ und } \mu-2r,\ \mu-2r-4,$$
$$\mu-2n+2,$$

eine fortlaufende Reihe und wir können daher das Product in folgender Form schreiben:

$$\frac{\mu(\mu-2)\ldots(\mu-2n+2)}{1.3.5\ldots(2r-1)} \cdot \frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2r+1)}{2.4.6\ldots(2r)} \cdot \frac{1}{2.4.6\ldots(2n-2r)}.$$

Setzt man noch im Zähler und Nenner die Factorenreihe

$$(2r+1)(2r+3)\ldots(2n-3)(2n-1)$$

zu, wodurch sich der Werth des Bruches nicht ändert, so erhält man im Nenner des ersten Factors die ununterbrochene Reihe der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n+1$, mithin:

$$(\mu)_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r}=$$

$$\frac{\mu(\mu-2)\ldots(\mu-2n+2)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2r+1)}{2.4.6\ldots(2r)}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2r+1)}{2.4.6\ldots(2n-2r)}.$$

Der erste dieser Factoren ist von r unabhängig; wir setzen daher der Kürze wegen

5) $$\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2n+2)}{1.3.5\ldots(2n-1)}=K.$$

Der zweite Factor ist nichts Anderes als der Binomialcoefficient $\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_r$, wie man leicht durch Formel 2) prüft; schreibt man den dritten Factor in der Form

$$\frac{(2n-1)(2n-1-2)\ldots(2n-1-\overline{2n-2r}+2)}{2.4.6\ldots(2n-2r)}$$

so erkennt man auch in ihm einen Binomialcoefficienten, nämlich $\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-r}$; es ist also

6) $$(\mu)_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r}=K\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_r\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-r}$$

Setzt man hier successive $r=0, 1, 2, \ldots n$ und addirt alle entspringenden Gleichungen, so folgt, dafs die Reihe 3) gleich ist der nachstehenden

$$K\left[\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_0\left(\frac{2n-1}{2}\right)_n+\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_1\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-1}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n\left(\frac{2n-1}{2}\right)_0\right]$$

Die eingeklammerte Reihe läfst sich aber nach Formel 1) summiren, wenn man $\alpha=\frac{2n-1}{2}$, $\beta=\frac{\mu-1}{2}$ setzt; ihre Summe ist $(\alpha+\beta)_n$ oder

$$\left(\frac{\mu+2n-2}{2}\right)_n=\frac{(\mu+2n-2)(\mu+2n-4)\ldots(\mu+2)\mu}{2.4.6\ldots(2n)}.$$

Setzt man hierzu den Factor K aus 5), so findet man, dafs die Reihe 3) gleich ist dem Ausdrucke

$$\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-\overline{2n-2})}{1.3.5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{\mu(\mu+2)(\mu+4)\ldots(\mu+2n-2)}{2.4.6\ldots(2n)}$$

woraus die Gleichung folgt

7) $$(\mu)_0\left(\frac{\mu}{2}\right)_n+(\mu)_2\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_{n-1}+(\mu)_4\left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(\mu)_{2n-2}\left(\frac{\mu-2n+2}{2}\right)_1+(\mu)_{2n}\left(\frac{\mu-2n}{2}\right)_0$$
$$=\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\ldots(\mu^2-[2n-2]^2)}{1.2.3.4\ldots(2n)}.$$

b. Durch eine ganz ähnliche Transformation gelangt man zur Summirung der Reihe

$$8)\qquad (\mu)_1 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n + (\mu)_3 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (\mu)_{2n-1} \left(\frac{\mu-2n+1}{2}\right)_1 + (\mu)_{2n+1} \left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0.$$

Irgend einer dieser Summanden ist

$$9)\qquad (\mu)_{2r+1} \left(\frac{\mu-2r-1}{2}\right)_{n-r}$$
$$= \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-2r)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2r+1)} \cdot \frac{(\mu-2r-1)(\mu-2r-3)\ldots(\mu-2n+1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n-2r)}.$$

Im Zähler bilden diejenigen Factoren, in denen ungerade Zahlen abgezogen werden, nämlich

$$\mu-1,\quad \mu-3,\ \ldots\ \mu-2r+1$$

und

$$\mu-2r-1,\quad \mu-2r-3,\ \ldots\ \mu-2n+1$$

eine ununterbrochene Reihenfolge; wir können daher die rechte Seite der Gleichung 9) in folgende Form bringen:

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2r+1)} \cdot \frac{(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2r)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2r)} \cdot \frac{1}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n-2r)}.$$

Setzt man noch im Zähler und Nenner die Factorenreihe

$$(2r+3)(2r+5)\ldots(2n-1)(2n+1)$$

zu, so ist der obige Ausdruck gleich dem folgenden

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n+1)} \cdot \frac{(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2r)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2r)} \cdot \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(2r+3)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n-2r)}$$

in welchem der erste Factor von r unabhängig ist und mit K bezeichnet werden mag. Schreibt man die anderen beiden Factoren in folgenden Formen:

$$\frac{(\mu-2)(\mu-2-2)\ldots(\mu-2-2r+2)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2r}$$

und

$$\frac{(2n+1)(2n+1-2)\ldots(2n+1-\overline{2n-2r}+2)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n-2r)}$$

so erkennt man in ihnen die Binomialcoefficienten $\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_r$ und $\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-r}$; folglich ist

$$(\mu)_{2r+1} \left(\frac{\mu-2r-1}{2}\right)_{n-r} = K \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_r \left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-r}.$$

Setzt man successive $r = 0, 1, 2 \ldots n$ und addirt alle so ent-

stehenden Glieder, so findet man, dafs die Reihe 8) gleich ist der folgenden

$$K\left[\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_0\left(\frac{2n+1}{2}\right)_n+\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_1\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-1}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_n\left(\frac{2n+1}{2}\right)_0\right]=K\left(\frac{\mu-1+2n+1}{2}\right)_n$$

woraus man durch Entwickelung des zweiten Factors und Substitution des Werthes von K findet:

$$10)\quad (\mu)_1\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n+(\mu)_3\left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1}+\cdots$$
$$\cdots+(\mu)_{2n-1}\left(\frac{\mu-2n+1}{2}\right)_1+(\mu)_{2n+1}\left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0$$
$$=\frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-[2n-1]^2)}{1.2.3.4\ldots(2n+1)}.$$

c. Man bemerkt ebenso leicht, dafs

$$(\mu)_{2r}\left(\frac{\mu-2r-1}{2}\right)_{n-r}$$
$$=\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\left(\frac{\mu}{2}\right)_r\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-r}$$

ist, und hieraus findet man, wenn $r=0, 1, 2, \ldots n$ gesetzt und Alles addirt wird,

$$11)\quad (\mu)_0\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n+(\mu)_2\left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1}+(\mu)_4\left(\frac{\mu-5}{2}\right)_{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(\mu)_{2n}\left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0=\frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-[2n-1]^2)}{1.2.3\ldots(2n)}.$$

d. Aus der Gleichung

$$(\mu)_{2r+}\left(\frac{\mu-2r-2}{2}\right)_{n-r}$$
$$=\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2n)}{1.3.5\ldots(2n+1)}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_r\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-r}$$

ergiebt sich endlich noch für $r=0, 1, 2, \ldots n$ und Addition aller entstehenden Glieder

$$12)\quad (\mu)_1\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_n+(\mu)_3\left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-1}+(\mu)_5\left(\frac{\mu-6}{2}\right)_{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(\mu)_{2n+1}\left(\frac{\mu-2n-2}{2}\right)_0=\frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\ldots(\mu^2-[2n]^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)}.$$

§. 40.

Zusammengesetzte binomische Entwickelungen.

Um eine Anwendung der vorigen Formeln zu zeigen, gehen wir von den folgenden Gleichungen aus, welche für jedes endliche z gelten,

$$(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu$$
$$=(\mu)_0(1+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}+(\mu)_1(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}z+(\mu)_2(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-2)}z^2+\ldots;$$
$$(\sqrt{1+z^2}-z)^\mu$$
$$=(\mu)_0(1+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}-(\mu)_1(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}z+(\mu)_2(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-2)}z^2-\ldots;$$
die halbe Summe derselben ist

1) $$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu+(\sqrt{1+z^2}-z)^\mu]$$
$$=(\mu)_0(1+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}+(\mu)_2(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-2)}z^2+(\mu)_4(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-4)}z^4+\ldots$$
und die halbe Differenz

2) $$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu-(\sqrt{1+z^2}-z)^\mu]$$
$$=(\mu)_1(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}z+(\mu)_3(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-3)}z^3+(\mu)_5(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-5)}z^5+\ldots$$

Betrachten wir zunächst μ als ganze positive Zahl, so müssen wir gerade und ungerade μ unterscheiden, denn im ersten Falle sind
$$\tfrac{1}{2}\mu,\quad \tfrac{1}{2}(\mu-2),\quad \tfrac{1}{2}(\mu-4),\quad \tfrac{1}{2}(\mu-6),\ \ldots$$
ganze Zahlen, während gleichzeitig
$$\tfrac{1}{2}(\mu-1),\quad \tfrac{1}{2}(\mu-3),\quad \tfrac{1}{2}(\mu-5),\ \ldots$$
Brüche sind; im zweiten Falle verhält sich die Sache umgekehrt.

a. Aus No. 1) folgt unter Voraussetzung eines geraden μ und durch Entwickelung der Potenzen von $1+z^2$
$$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu+(\sqrt{1+z^2}-z)^\mu]$$
$$\begin{aligned}
=(\mu)_0&\left\{\left(\frac{\mu}{2}\right)_0+\left(\frac{\mu}{2}\right)_1z^2+\left(\frac{\mu}{2}\right)_2z^4+\left(\frac{\mu}{2}\right)_3z^6+\ldots\right\}\\
+(\mu)_2&\left\{\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_0z^2+\left(\frac{\mu-2}{1}\right)_1z^4+\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_2z^6+\ldots\right\}\\
+(\mu)_4&\left\{\left(\frac{\mu-4}{2}\right)_0z^4+\left(\frac{\mu-4}{2}\right)_1z^6+\ldots\right\}\\
+(\mu)_6&\left\{\left(\frac{\mu-6}{2}\right)_0z^6+\ldots\right\}\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$
wofür wir kurz schreiben

3) $$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu+(\sqrt{1+z^2}-z)^\mu]$$
$$=A_0+A_2z^2+A_4z^4+A_6z^6+\ldots.$$

Der Coefficient von z^{2n} ist hier, wie man aus dem Vorigen ersieht,
$$A_{2n}=(\mu)_0\left(\frac{\mu}{2}\right)_n+(\mu)_2\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_{n-1}+(\mu)_4\left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+(\mu)_{2n-2}\left(\frac{\mu-2n+2}{2}\right)_1+(\mu)_{2n}\left(\frac{\mu-2n}{2}\right)_0,$$
oder nach Formel 7) des vorigen Paragraphen

$$A_{2n} = \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)\dots(\mu^2 - [2n-2]^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \dots (2n)}.$$

Entwickelt man hiernach A_2, A_4, A_6, etc. und berücksichtigt, dafs

$$A_0 = (\mu)_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_0 = 1$$

ist, so erhält man aus No. 3) die folgende, für gerade μ gültige Formel:

4) $$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu + (\sqrt{1+z^2}-z)^\mu]$$
$$= 1 + \frac{\mu^2}{1 \,.\, 2} z^2 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} z^4 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} z^6 + \dots.$$

Bei ungeraden μ geben wir der Gleichung 1) die Form

$$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu + (\sqrt{1+z^2}-z)^\mu]$$
$$= \sqrt{1+z^2}\left\{(\mu)_0(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} + (\mu)_2(1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-3)} z^2 + \dots\right\}$$

und da hier $\frac{1}{2}(\mu-1)$, $\frac{1}{2}(\mu-3)$ etc. ganze positive Zahlen sind, so können wir die Potenzen von $1+z^2$ wieder in endliche Reihen verwandeln. Das Resultat ist von der Form

5) $$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu + (\sqrt{1+z^2}-z)^\mu]$$
$$= \sqrt{1+z^2}\,(a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots..)$$

und darin $a_0 = 1$

$$a_{2n} = (\mu)_0 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n + (\mu)_2 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1} + (\mu)_4 \left(\frac{\mu-5}{2}\right)_{n-2} + \dots$$
$$\dots + (\mu)_{2n} \left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0$$

oder nach Formel 11) des vorigen Paragraphen

$$a_{2n} = \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\dots(\mu^2-[2n-1]^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \dots (2n)}.$$

Gemäfs No. 5) haben wir nun für ungerade μ:

6) $$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu + (\sqrt{1+z^2}-z)^\mu]$$
$$= \sqrt{1+z^2}\left\{1 + \frac{\mu^2-1^2}{1 \,.\, 2} z^2 + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} z^4 + \dots\right\}.$$

Die Transformationen, welche zu den Formeln 4) und 6) führten, können auch bei jedem beliebigen μ vorgenommen werden, nur ist dabei zu beachten, dafs in diesem Falle die Exponenten von $1+z^2$ keine ganzen positiven Zahlen sind und dafs folglich z der Bedingung $-1 < z < 1$ unterworfen werden mufs. Man erhält zunächst eine unendliche Doppelreihe, welche nach §. 34 die Umsetzung in eine Reihe von Verticalcolonnen gestattet, und gelangt schliefslich zu dem Resultate, dafs die Formeln 4) und 6) unter der Beschränkung $z^2 < 1$ für jedes μ gelten.

b. Wenn in No. 2) unter μ eine ungerade Zahl verstanden wird, so führt die Entwickelung der Potenzen von $1 + z^2$ zu einer Gleichung folgender Form

7)
$$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu - (\sqrt{1+z^2}-z)^\mu] = B_1 z + B_3 z^3 + B_5 z^5 + \dots .$$

und zwar ist der Coefficient von z^{2n+1}

$$B_{2n+1} = (\mu)_1 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n + (\mu)_3 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1} + \dots$$
$$\dots + (\mu)_{2n+1}\left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0$$

oder nach Formel 10) des vorigen Paragraphen

$$B_{2n+1} = \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\dots(\mu^2-[2n-1]^2)}{1.2.3.4\dots(2n+1)}.$$

Daher ist zufolge von No. 7) für ungerade μ:

8)
$$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu - (\sqrt{1+z^2}-z)^\mu] = \frac{\mu}{1}z + \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}z^3 + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}z^5 + \dots .$$

Bei geraden μ dagegen schreiben wir statt No. 2)

$$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu - (\sqrt{1+z^2}-z)^\mu]$$
$$= \sqrt{1+z^2}\left\{(\mu)_1 (1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-2)} z + (\mu)_3 (1+z^2)^{\frac{1}{2}(\mu-4)} z^3 + \dots\right\}$$

und erhalten durch Entwickelung der Potenzen von $1 + z^2$

9)
$$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu - (\sqrt{1+z^2}-z)^\mu] = \sqrt{1+z^2}\,(b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \dots);$$

darin ist

$$b_{2n+1} = (\mu)_1 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_n + (\mu)_3 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-1} + \dots$$
$$\dots + (\mu)_{2n+1}\left(\frac{n-2n-2}{2}\right)_0$$

oder nach Formel 12) des vorigen Paragraphen

$$b_{2n+1} = \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\dots(\mu^2-[2n]^2)}{1.2.3.4\dots(2n+1)}.$$

Wir haben daher für gerade μ:

10)
$$\tfrac{1}{2}[(\sqrt{1+z^2}+z)^\mu - (\sqrt{1+z^2}-z)^\mu] = \sqrt{1+z^2}\left\{\frac{\mu}{1}z + \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3}z^3 + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5}z^5 + \dots\right\}.$$

Auch die Formeln 8) und 10) lassen eine Verallgemeinerung für beliebige μ zu, nur mufs dann $z^2 < 1$ genommen werden.

c. Setzt man

$$\sqrt{1+z^2}+z=x,$$

so folgt

$$\sqrt{1+z^2}-z=\frac{1}{x},$$

$$\sqrt{1+z^2}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right),\qquad z=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right);$$

man hat dann aus No. 4) bei geraden μ:

11) $$x^\mu+\frac{1}{x^\mu}$$
$$=2\left\{1+\frac{\mu^2}{2.4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{2.4.6.8}\left(x-\frac{1}{x}\right)^4\right.$$
$$\left.+\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{2.4.6.8.10.12}\left(x-\frac{1}{x}\right)^6+\ldots\right\}$$

und aus No. 6) bei ungeraden μ:

12) $$x^\mu+\frac{1}{x^\mu}$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{1+\frac{\mu^2-1^2}{2.4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{2.4.6.8}\left(x-\frac{1}{x}\right)^4+\ldots\right\}.$$

Ferner ist nach No. 8) bei ungeraden μ:

13) $$x^\mu-\frac{1}{x^\mu}$$
$$=2\left\{\frac{\mu}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{\mu(\mu^2-1^2)}{2.4.6}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{2.4.6.8.10}\left(x-\frac{1}{x}\right)^5+\ldots\right\}$$

und nach No. 10) bei geraden μ:

14) $$x^\mu-\frac{1}{x^\mu}$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{\frac{\mu}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{\mu(\mu^2-2^2)}{2.4.6}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{2.4.6.8.10}\left(x-\frac{1}{x}\right)^5+\ldots\right\}.$$

Bei nicht ganzen μ gelten die letzten vier Formeln gleichfalls, wenn der absolute Werth von $x-\frac{1}{x}$ weniger als die Einheit beträgt.

Capitel VII.

Die Reihen für Exponentialgröfsen und Logarithmen.

§. 41.

Die Exponentialreihe.

In §. 8, Formel 8) wurde gezeigt, dafs bei unendlich wachsenden m die Gleichung

$$Lim\left[\left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right]=e^z$$

gilt und dafs folglich die natürliche Exponentialgröfse als Grenzwerth einer gewissen Potenz betrachtet werden kann; dieses Theorem bietet ein Mittel, um aus irgend einer Eigenschaft der Potenz die entsprechende Eigenschaft der Exponentialgröfse herzuleiten, und daher benutzen wir dasselbe auch zur Entwickelung einer Reihe für e^z, indem wir die oben angedeuteten Operationen an der Binomialreihe ausführen.

Nach Formel 6) in §. 38 ist unter der Voraussetzung eines ganzen positiven m und für $k > mx$

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\dots$$
$$\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-\overline{k-2})}{1\,.\,2\,.\,3\dots(k-1)}x^{k-1}$$
$$+\frac{m(m-1)\dots(m-\overline{k-1})}{1\,.\,2\,.\,\dots\,.\,k}\cdot\frac{\varrho x^k}{1-\left[\frac{mx}{k}\right]},$$

wobei ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet; nehmen wir $x=\frac{z}{m}$ und $k > z$, so wird

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}z+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\,.\,2}z^2+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3+\dots$$
$$\dots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\dots(k-1)}z^{k-1}$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\dots\,.\,k}\cdot\frac{\varrho z^k}{1-\left[\frac{z}{k}\right]}$$

Wir lassen nun m ins Unendliche wachsen, ohne die willkürliche ganze Zahl k zu ändern; die linke Seite hat dann e^z zur Grenze, rechter Hand nähern sich die Brüche

$$\frac{1}{m},\ \frac{2}{m},\ \frac{3}{m},\ \ldots .\ \frac{k-1}{m}$$

der gemeinschaftlichen Grenze Null, mithin wird

$$1)\quad e^z = 1 + \frac{1}{1}z + \frac{1}{1\,.\,2}z^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1\,.\,2\ldots(k-1)}z^{k-1} + \frac{1}{1\,.\,2\ldots k}\cdot\frac{\varrho\, z^k}{1-\left[\frac{z}{k}\right]},$$
$$k > z,\quad 0 < \varrho < 1.$$

Hieraus läfst sich auch wieder eine unendliche Reihe für e^z ableiten. Wir schreiben zu diesem Zwecke

$$2)\quad e^z - \frac{\varrho}{1-\left[\frac{z}{k}\right]}\cdot\frac{z^k}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}$$
$$= 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\,.\,2} + \frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{z^{k-1}}{1\,.\,2\ldots(k-1)}$$

und lassen die Zahl k, welche die Anzahl der rechts stehenden Summanden bestimmt, ins Unendliche wachsen. Wie in §. 25 bewiesen wurde, beträgt der absolute Werth von

$$\frac{z^k}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}$$

weniger als der absolute Werth von

$$\left(\frac{z}{\sqrt{k}}\right)^k,$$

und da bei unendlich wachsenden k schon $\frac{z}{\sqrt{k}}$ die Null zur Grenze hat, so ist um so mehr

$$Lim\,\frac{z^k}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k} = 0,$$

mithin folgt aus No. 2)

$$3)\quad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\,.\,2} + \frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots,$$

wobei z jede beliebige endliche Gröfse bedeuten kann.

In dem speciellen Falle $z = 1$ geben die Formel 1) und 3)

$$4)\quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots + \frac{1}{1\,.\,2\ldots(k-1)} + \frac{1}{1\,.\,2\ldots(k-1)}\cdot\frac{\varrho}{k-1},$$

$$5)\quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots\cdots;$$

hieran knüpfen sich einige wesentliche Bemerkungen.

Was zunächst die Formel 4) betrifft, so dient sie zur numerischen Berechnung der Zahl e, wobei die Genauigkeit beliebig weit getrieben werden kann, wenn man k grofs genug wählt. Man erhält z. B. für $k=11$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \cdots + \frac{1}{1\,.\,2\ldots 10} = 2{,}71828\,18011$$

$$\frac{1}{1\,.\,2\ldots 10}\cdot\frac{\varrho}{10} = 0{,}00000\,00276\,.\,\varrho$$

mithin, wenn man dem ϱ erst seinen kleinsten Werth Null und dann seinen gröfsten Werth 1 ertheilt,

$$2{,}71828\,18011 < e < 2{,}71828\,18287,$$

womit e auf sieben Decimalen genau bestimmt ist.

Mittelst der Formel 5) läfst sich entscheiden, ob e eine rationale oder irrationale Zahl ist. Die Summe der Reihe

$$6)\qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \cdots$$

beträgt nämlich weniger als die Summe der folgenden

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,2\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,2\,.\,2\,.\,2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

sie ist daher ein echter Bruch. Wäre nun

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \cdots\cdots = \frac{p}{q},$$

wo p und $q > p$ ganze positive Zahlen bedeuten, so würde durch Multiplication mit $2\,.\,3\,.\,4\ldots q$ folgen

$$3\,.\,4\,.\,5\ldots q + 4\,.\,5\,.\,6\,.\,q + 5\,.\,6\ldots q + \cdots\cdots + 1$$
$$+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\,(q+2)} + \frac{1}{(q+1)\,(q+2)\,(q+3)} + \cdots\cdots$$
$$= p\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\ldots(q-1).$$

Die erste Zeile enthält nur Producte von ganzen positiven Zahlen; die Summe dieser Producte ist daher wiederum eine ganz positive

Zahl, die M heifsen möge. Die rechte Seite ist ebenfalls eine ganze positive Zahl, die wir mit N bezeichnen wollen, mithin wäre

$$7)\qquad M+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots.=N.$$

Nun beträgt aber die Summe der Reihe

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\ldots.$$

weniger als

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\frac{1}{(q+1)^4}+\ldots.$$

$$=\frac{1}{q+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{1}{q}$$

und daher auch weniger als 1, da q jedenfalls die Einheit übersteigt. Hiernach müfste in No. 7) die ganze positive Zahl M, vereinigt mit einem echten Bruche, die ganze positive Zahl N geben; diefs ist aber unmöglich, und daher kann die Summe der Reihe 6) keinem rationalen Bruche gleich sein, mithin ist auch e eine Irrationalzahl *).

Nach dieser Digression über die Zahl e kehren wir zur Formel 3) zurück und wollen zunächst eine andere Ableitung derselben zeigen, welche keinen Grenzübergang erfordert. Setzt man

$$8)\qquad f(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots.$$

und dem entsprechend

$$f(y)=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots.,$$

so giebt die Multiplication beider Gleichungen

$$9)\qquad f(x)\cdot f(y)=1+u_1+u_2+u_3+\ldots.,$$

wobei die Abkürzung benutzt wurde:

$$u_n=\frac{x^n}{1.2..n}+\frac{x^{n-1}}{1.2..(n-1)}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x^{n-2}}{1.2..(n-2)}\cdot\frac{y^2}{1.2}+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{x}{1}\cdot\frac{y^{n-1}}{1.2..(n-1)}+\frac{y^n}{1.2\ldots.n}.$$

Der letzten Gleichung kann man die Form geben

$$u_n=\frac{1}{1.2..n}\left\{x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2+\ldots.\right\}$$

d. i. nach dem binomischen Satze

$$u_n=\frac{1}{1.2\ldots n}(x+y)^n;$$

*) Der obige einfache Beweis wurde von Stainville gegeben in den *Mélanges d'Analyse*, p. 339.

die Gleichung 9) geht nun über in

$$f(x) \cdot f(y) = 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1 \,.\, 2} + \frac{(x+y)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \dots$$

d. h.

10) $$f(x) \cdot f(y) = f(x+y).$$

Wie in §. 37 folgt hieraus, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet,

11) $$[f(x)]^m = f(mx)$$

und speciell für $m = 1$ bei umgekehrter Anordnung

$$f(m) = [f(1)]^m$$

oder vermöge der Bedeutung von $f(x)$

$$f(m) = \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \,.\, 2} + \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \dots\right)^m$$

Bezeichnet e die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} +$ etc., so ist hiernach

$$f(m) = e^m.$$

Im Fall x ein rationaler Bruch $\frac{p}{q}$ ist, erhält man aus No. 11) für $m = q$

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f(p) = e^p$$

mithin

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}}$$

welche Gleichung sich leicht auf positive irrationale Werthe von x ausdehnen läfst, so dafs für jedes positive z

$$f(z) = e^z$$

ist. Endlich folgt aus No. 10)

$$f(z) \cdot f(-z) = f(0) = 1$$

mithin

$$f(-z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{e^z} = e^{-z},$$

und daher ist für jedes endliche z

$$f(z) = e^z$$

d. h.

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \,.\, 2} + \frac{z^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \dots = e^z,$$

was mit der Gleichung 3) übereinstimmt *).

Setzt man einmal $z = \alpha x$, das andere Mal $z = -\alpha x$, so erhält man die beiden Gleichungen

*) Cauchy, *Cours d'analyse algèbr.* p. 168.

12) $$e^{\alpha x} = 1 + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots,$$

13) $$e^{-\alpha x} = 1 - \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{1 \cdot 2} - \frac{\alpha^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots,$$

welche sich wieder durch Addition und Subtraction combiniren lassen; diefs giebt

14) $$\frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} = 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\ldots,$$

15) $$\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} = \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha^5 x^5}{1 \cdot 2 \ldots 5} + \ldots.$$

Diese Entwickelungen betreffen immer nur Exponentialgröfsen, deren Basis e ist, wir haben daher noch den Fall einer beliebigen Basis a zu erörtern. Setzen wir

$$e^z = a^x,$$

so folgt, indem wir beiderseits die Logarithmen in irgend einem Systeme nehmen,

$$z \log e = x \log a, \qquad z = \frac{x \log a}{\log e}$$

mithin durch Substitution der Werthe von e^z und z in die Formel 3)

16) $$a^x = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x \log a}{\log e}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{x \log a}{\log e}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{x \log a}{\log e}\right) + \ldots.$$

Die Basis des logarithmischen Systemes ist hier willkürlich; nehmen wir dafür die Zahl e, so wird

17) $$a^x = 1 + \frac{x\, la}{1} + \frac{(x\, la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x\, la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots,$$

dagegen erhalten wir, wenn a als Basis des Systems gewählt wird,

18) $$a^x = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{{}^a\!\log e}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{{}^a\!\log e}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{x}{{}^a\!\log e}\right)^3 + \ldots.$$

Das letzte Resultat ist in sofern von Bedeutung, als es zu einem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl finden lehrt; aus $a^x = y$ folgt nämlich $x = {}^a\!\log y$ und

19) $$y = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{{}^a\!\log y}{{}^a\!\log e}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{{}^a\!\log y}{{}^a\!\log e}\right)^2 + \ldots.$$

In dem speciellen Falle $a = e$ wird

20) $$y = 1 + \frac{1}{1}(ly) + \frac{1}{1 \cdot 2}(ly)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(ly)^3 + \ldots,$$

woraus man wiederum ersieht, dafs das Logarithmensystem mit der Basis e das einfachste und darum natürlichste ist*).

§. 42.

Die Reihen für $l(1+x)$ und $l(1-x)$.

Sowie im vorigen Paragraphen die Exponentialreihe aus der Binomialreihe abgeleitet wurde, so läfst sich auch eine logarithmische Reihe finden, wenn man von der in §. 8, No. 11) bewiesenen Formel

$$Lim\,\frac{a^\delta - 1}{\delta} = la$$

Gebrauch macht. Zufolge dieses Satzes ist nämlich

$$Lim\,\frac{(1+x)^\delta - 1}{\delta} = l(1+x),$$

und hier übersieht man auf der Stelle die Möglichkeit, den binomischen Satz anwenden zu können. Denken wir uns zunächst unter δ einen beliebigen positiven echten Bruch, so müssen wir dem x die Beschränkung $-1 < x < +1$ auferlegen und haben dann nach Formel 15) in §. 38, wenn $k > \delta$ und

$$[x] < \varepsilon < 1, \quad 0 < \varrho < 1$$

genommen wird,

$$(1+x)^\delta = 1 + \frac{\delta}{1}x + \frac{\delta(\delta-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)\ldots(\delta-\overline{k-2})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(k-1)}x^{k-1}$$
$$+ \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)\ldots\ldots(\delta-\overline{k-1})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots k}\cdot\frac{\varrho x^k}{1-\varepsilon}$$

mithin

$$\frac{(1+x)^\delta - 1}{\delta} = \frac{1}{1}x + \frac{\delta-1}{1\,.\,2}x^2 + \frac{(\delta-1)(\delta-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{(\delta-1)(\delta-2)\ldots\ldots(\delta-\overline{k-2})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(k-1)}x^{k-1}$$
$$+ \frac{(\delta-1)(\delta-2)\ldots\ldots(\delta-\overline{k-1})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots k}\cdot\frac{\varrho x^k}{1-\varepsilon}.$$

Durch Übergang zur Grenze für unendlich abnehmende δ wird hieraus

$$1)\quad l(1+x) = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots + \frac{(-1)^k}{k-1}x^{k-1}$$
$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\frac{\varrho x^k}{1-\varepsilon}.$$

---

*) Die Exponentialreihe wurde unter der Form 20) zuerst von Newton aufgestellt (Brief an Oldenburg für Leibnitz vom 26. Juli 1676).

Will man statt dieser endlichen Reihe eine unendliche Reihe für $l(1+x)$ haben, so schreibe man vorerst

$$l(1+x) + \frac{(-1)^k}{k} \cdot \frac{\varrho\, x^k}{1-\varepsilon}$$
$$= \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots + \frac{(-1)^k}{k-1}\, x^{k-1}$$

und lasse dann die willkürliche ganze Zahl k ins Unendliche wachsen. Da x ein positiver oder negativer echter Bruch ist, so wird $Lim\,(x^k) = 0$, mithin*)

2) $$l(1+x) = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots.$$
$$- < x < +1.$$

Zu demselben Resultate führt auch die Gleichung 10) in §. 17, wenn man k ins Unendliche wachsen läfst und x als echten Bruch voraussetzt; jedoch ist die so erhaltene Formel nur auf positive x beschränkt. Aus den Bemerkungen, welche wir im Fall eines positiven x an den Rest der binomischen Reihe knüpften, folgt übrigens leicht, dafs die Gleichung 2) auch für $x = +1$ richtig bleibt; für $x = -1$ dagegen wird die Reihe divergent.

Läfst man in No. 2) $-x$ an die Stelle von x treten, so ergiebt sich

3) $$l(1-x) = -\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \ldots,$$
$$-1 < x < +1,$$

oder auch

4) $$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = \tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Da der Quotient $1 : (1-x)$ einen echten Bruch zum Divisor hat, so beträgt er mehr als die Einheit; man kann daher

$$\frac{1}{1-x} = 1 + z \quad \text{oder} \quad x = \frac{z}{z+1}$$

setzen, wo nun z jede beliebige positive Zahl sein darf; die Formel 4) wird dann zur folgenden

5) $$l(1+z) = \frac{1}{1}\left(\frac{z}{z+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+1}\right)^3 + \ldots.$$

Theoretisch betrachtet liegt in den Formeln 3) und 5) die vollständige Lösung der Aufgabe, den natürlichen Logarithmus einer gegebenen Zahl zu finden; für alle Zahlen unter 1 dient nämlich die

---

*) Die Reihe 2) findet sich zuerst in der *Logarithmotechnica* von N. Mercator (1686).

Formel 3), für alle Zahlen über 1 die Formel 5). Zur practischen Rechnung eignen sich aber diese Formeln nicht sonderlich, weil die vorkommenden Reihen meistentheils langsam convergiren; wir entwickeln daher noch einige logarithmische Reihen von stärkerer Convergenz.

§. 43.

Die Berechnung der Logarithmen.

Nimmt man die Differenz der beiden Formeln, welche für $l(1+x)$ und $l(1-x)$ gelten, so erhält man

$$1)\qquad l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(\tfrac{1}{1}x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\ldots\right),$$
$$-1<x<+1;$$

durch Substitution von

$$\frac{1+x}{1-x}=z \quad \text{mithin} \quad x=\frac{z-1}{z+1}$$

geht die vorige Gleichung in die folgende über

$$2)\quad lz=2\left[\frac{1}{1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\ldots\right],$$

die für jedes positive z gilt, weil dann x immer zu einem echten Bruche wird. Bei kleinen z ist die Formel 2) vortheilhaft; so erhält man z. B. für $z=2$

$$l2=2\left[\frac{1}{1\,.\,3^1}+\frac{1}{3\,.\,3^3}+\frac{1}{5\,.\,3^5}+\ldots\right].$$

Brechen wir die eingeklammerte Reihe mit dem Summanden $\frac{1}{m\,.\,3^m}$ ab, wo m eine beliebige ungerade Zahl bezeichnet, so beträgt der noch folgende Rest

$$\frac{1}{(m+2)3^{m+2}}+\frac{1}{(m+4)3^{m+4}}+\frac{1}{(m+6)3^{m+6}}+\ldots$$

weniger als

$$\frac{1}{(m+2)3^{m+2}}\left\{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\ldots\right\}$$
$$=\frac{1}{(m+2)3^{m+2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}=\frac{1}{8(m+2)3^m},$$

mithin ist, wenn ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch bedeutet,

$$l2=2\left[\frac{1}{1\,.\,3^1}+\frac{1}{3\,.\,3^3}+\frac{1}{5\,.\,3^5}+\ldots+\frac{1}{m\,.\,3^m}\right]+\frac{\varrho}{4(m+2)3^m}.$$

Durch successive Berechnung der Potenzen von $\frac{1}{3}$ findet man

$$\frac{1}{4 \cdot 17 \cdot 3^{15}} = 0{,}0000\,00001,$$

folglich liefert die Annahme $m = 15$ den Werth von $l2$ auf 8 Decimalen genau, nämlich

$$l2 = 0{,}6931\,4718.$$

Kennt man la, so findet sich $l(a+b)$ durch die Bemerkung, dafs

$$l(a+b) = l\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right] = la + l\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

ist, wobei der letzte Logarithmus nach Formel 2) des vorigen Paragraphen entwickelt werden kann, wenn der absolute Werth von b weniger als der von a beträgt; man hat

$$3)\qquad l(a+b) = la + \frac{1}{1}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \ldots,$$
$$a^2 > b^2.$$

Hiernach liefse sich z. B. $l3$ finden, wenn man $a = 2$, $b = 1$ nähme und den vorigen Werth von $l2$ benutzte.

Eine brauchbarere Formel zur Berechnung von $l(a+b)$ ergiebt sich aus der Bemerkung, dafs

$$l(a+b) = la + l\left(1+\frac{b}{a}\right) = la + l\left[\frac{1+\dfrac{b}{2a+b}}{1-\dfrac{b}{2a+b}}\right]$$

ist; entwickelt man nämlich den letzten Logarithmus nach Formel 1), so folgt

$$4)\quad l(a+b) = la + 2\left\{\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \ldots\right\},$$

und zwar gilt diese Formel für alle positiven a und b, weil dann $b : (2a+b)$ d. h. x immer ein echter Bruch ist. Die Annahme $a = 2$, $b = 1$ giebt

$$l3 = l2 + 2\left\{\frac{2}{10} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^5 + \ldots\right\};$$

bricht man die Reihe mit der m^{ten} Potenz ab, so kann man den folgenden Rest leicht auf die vorhin gezeigte Weise beurtheilen und zwar findet man, dafs derselbe weniger beträgt als

$$\frac{1}{24(m+2)}\left(\frac{2}{10}\right)^m.$$

Für $m = 9$ wird der Rest so klein, dafs er auf die 8[te] Decimalstelle keinen Einflufs hat; diefs giebt

$$l3 = 1{,}0986\,1229.$$

Zu einer weiteren logarithmischen Reihe führt die identische Gleichung

$$lp = \frac{1}{2}\left[l(p-1) + l(p+1) - l\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\right];$$

entwickelt man nämlich den letzten Logarithmus nach der Formel für $l(1-x)$, so erhält man

$$5)\qquad lp = \frac{l(p-1) + l(p+1)}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{p^4} + \frac{1}{6}\frac{1}{p^6} + \cdots$$

$$p > 1.$$

Diese Formel lehrt den Logarithmus einer Zahl p finden, wenn die Logarithmen der beiden Nachbarzahlen $p-1$ und $p+1$ schon bekannt sind. Ist nun p eine ungerade Zahl, so sind $p-1$ und $p+1$ gerade, d. h. zusammengesetzte Zahlen, und daher kann man deren Logarithmen aus den schon vorher berechneten Logarithmen ihrer Factoren herleiten. Für $p = 5$ z. B. ist $l4 = 2\,l2$, $l6 = l2 + l3$, mithin

$$l5 = \frac{3\,l2 + l3}{2} + \frac{1}{2}\frac{4}{100} + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{100}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{100}\right)^3 + \cdots,$$

wobei leicht zu sehen ist, dafs man nur bis $(0{,}04)^5$ zu gehen braucht, um 8 Decimalen genau zu erhalten; man findet

$$l5 = 1{,}60943791.$$

Die Rechnung nach Formel 5) wird übrigens um so bequemer, je gröfser die Zahl p ist; denn einerseits braucht man bei grofsen p sehr wenig Reihenglieder, andererseits wird man mittelst der obigen Reihe nur die Logarithmen von Primzahlen berechnen, und diese letzteren treten um so spärlicher auf, je weiter man in der Zahlenreihe fortschreitet.

Hat man nach den angegebenen Methoden eine Tafel der natürlichen Logarithmen construirt, so kann man aus ihr die Logarithmen jedes anderen Systems ohne Mühe herleiten. Nach Formel 13) in §. 8 ist nämlich

$$^{a}log\, z = \frac{1}{la} \cdot lz,$$

die künstlichen Logarithmen entstehen also dadurch, dafs man die natürlichen Logarithmen mit dem constanten Factor $\frac{1}{la}$ multiplicirt. Letzteren nennt man den Modulus des Systemes mit der Basis a und bezeichnet ihn durch

$$\frac{1}{la} = M_a.$$

Für das gewöhnliche Logarithmensystem ist $a = 10$,

$$l10 = l2 + l5 = 2,30258509,$$

$$M_{10} = \frac{1}{l10} = 0,43429448;$$

durch Multiplication mit 0,434... werden also die natürlichen Logarithmen zu gewöhnlichen; umgekehrt erhält man die natürlichen Logarithmen aus den gewöhnlichen, wenn man letztere durch den Modulus dividirt, d. h. mit $l10 = 2,302\ldots$ multiplicirt. In den logarithmischen Handbüchern findet man meistentheils eine Hülfstabelle zur Erleichterung dieser Operationen.

Capitel VIII.

Die goniometrischen Reihen.

§. 44.

Die goniometrischen Functionen vielfacher Bögen.

Sowie der binomische Satz die Grundlage für die Entwickelung der Exponentialreihe und der logarithmischen Reihen bildet, so beruht die Ableitung der goniometrischen Reihen auf denjenigen Formeln, welche den Sinus oder Cosinus eines vielfachen Bogens berechnen lehren, wenn die goniometrischen Functionen des einfachen Bogens bekannt sind. Meistentheils fehlen diese Formeln in den Lehrbüchern der Trigonometrie (weil dort überhaupt die Goniometrie nur als Vorstudie zur Trigonometrie dient), wir müssen sie daher erst entwickeln. Zur Abkürzung sei

1) $$P_n = \frac{\cos nu}{\cos^n u}, \quad Q_n = \frac{\sin nu}{\cos^n u},$$

man hat dann

$$P_{n+1} = \frac{\cos (n+1) u}{\cos^{n+1} u} = \frac{\cos nu \cos u - \sin nu \sin u}{\cos^{n+1} u}$$

oder, wenn man mit dem Nenner in jeden einzelnen Theil des Zählers dividirt und die eingeführte Bezeichnung anwendet,

2) $$P_{n+1} = P_n - Q_n \tan u.$$

Auf ganz gleiche Weise findet man sehr leicht

3) $$Q_{n+1} = Q_n + P_n \tan u.$$

Von den Werthen $P_0 = 1$ und $Q_0 = 0$ ausgehend, kann man die Formeln 2) und 3) der Reihe nach für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ etc. benutzen,

um nacheinander P_1 und Q_1, P_2 und Q_2, P_3 und Q_3 etc. zu berechnen; dabei ergeben sich folgende Gleichungen

$$P_1 = 1, \qquad Q_1 = tan\ u,$$
$$P_2 = 1 - tan^2\ u, \qquad Q_2 = 2\ tan\ u,$$
$$P_3 = 1 - 3\ tan^2\ u, \qquad Q_3 = 3\ tan\ u - tan^3\ u,$$
$$P_4 = 1 - 3\ tan^2\ u + tan^4\ u, \qquad Q_4 = 4\ tan\ u - 4\ tan^3\ u,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Mit einiger Aufmerksamkeit bemerkt man, dafs in den Formeln für P immer nur gerade Potenzen von $tan\ u$ vorkommen und dafs die Coefficienten mit den Binomialcoefficienten gerader Indices übereinstimmen; dem analog enthalten die Formeln für Q nur ungerade Potenzen von $tan\ u$, und die Coefficienten sind Binomialcoefficienten ungerader Indices. Hieraus schliefst man inductorisch, dafs die allgemeinen Formeln sein werden:

$$P_m = (m)_0 - (m)_2\ tan^2\ u + (m)_4\ tan^4\ u - (m)_6\ tan^6\ u + \cdots .$$
$$Q_m = (m)_1\ tan\ u - (m)_3\ tan^3\ u + (m)_5\ tan^5\ u - \cdots\cdots ;$$

selbstverständlich bedeutet hier m eine ganze positive Zahl, und die Reihen sind soweit fortzusetzen, bis sie von selbst abbrechen.

Um die Gültigkeit der gewonnenen Formeln zu untersuchen, entwickeln wir die Ausdrücke

$$P_m - Q_m\ tan\ u \quad \text{und} \quad Q_m + P_m\ tan\ u,$$

indem wir für P_m und Q_m die vorigen Reihen setzen und die gleichartigen Gröfsen vereinigen; diefs giebt

$$P_m - Q_m\ tan\ u$$
$$= (m)_0 - [(m)_1 + (m)_2]\ tan^2\ u + [(m)_3 + (m)_4]\ tan^4\ u$$
$$- [(m)_5 + (m)_6]\ tan^6\ u + \cdots ,$$
$$Q_m + P_m\ tan\ u$$
$$= [(m)_0 + (m)_1]\ tan\ u - [(m)_2 + (m)_3]\ tan^3\ u + [(m)_4 + (m)_5]\ tan^5\ u - \cdots .$$

Vermöge der Formeln 2) und 3) sind die linken Seiten dieser Gleichungen identisch mit P_{m+1} und Q_{m+1}; rechter Hand läfst sich $(m)_0$ durch das gleiche $(m+1)_0$ ersetzen und aufserdem die Summe je zwei benachbarter Binomialcoefficienten mittelst der Formel

$$(m)_{k-1} + (m)_k = (m+1)_k$$

zusammenziehen; die vorigen Gleichungen gehen jetzt in die folgenden über

$$P_{m+1} = (m+1)_0 - (m+1)_2\ tan^2\ u + (m+1)_4\ tan^4\ u$$
$$- (m+1)_6\ tan^6\ u + \cdots ,$$
$$Q_{m+1} = (m+1)_1\ tan\ u - (m+1)_3\ tan^3\ u + (m+1)_5\ tan^5\ u - \cdots .$$

Diese unterscheiden sich von den früheren Formeln für P_m und Q_m nur dadurch, dafs $m+1$ an der Stelle von m steht; wenn daher

jene Formeln für irgend einen Werth von m richtig sind, so bleiben sie es auch, sobald man m um die Einheit vergrößsert. Für $m = 1, 2, 3, 4$ liefern die obigen Formeln richtige Resultate, sie gelten daher auch für $m = 5$, dann wieder für $m = 6$ u. s. w., d. h. sie gelten für jedes ganze positive m. Zufolge der ursprünglichen Bedeutung von P_m und Q_m haben wir nun folgende Resultate

$$4)\quad \frac{\cos mu}{\cos^m u} = (m)_0 - (m)_2 \tan^2 u + (m)_4 \tan^4 u - (m)_6 \tan^6 u + \ldots.$$

$$5)\quad \frac{\sin mu}{\cos^m u} = (m)_1 \tan u - (m)_3 \tan^3 u + (m)_5 \tan^5 u - \ldots.$$

oder auch

$$6)\quad \cos mu = (m)_0 \cos^m u - (m)_2 \cos^{m-2} u \sin^2 u + (m)_4 \cos^{m-4} u \sin^4 u - \ldots.$$

$$7)\quad \sin mu = (m)_1 \cos^{m-1} u \sin u - (m)_3 \cos^{m-3} u \sin^3 u + \ldots\ldots$$

Hierin liegt die Lösung des anfangs erwähnten Problemes, $\cos mu$ und $\sin mu$ aus $\cos u$ und $\sin u$ herzuleiten*).

Die Formeln 6) und 7) sind noch weiterer Umwandlungen fähig, welche auf dem Grundgedanken beruhen, das gleichzeitige Vorkommen von $\cos u$ und $\sin u$ zu vermeiden, also entweder $\cos u$ durch $\sin u$ oder umgekehrt $\sin u$ durch $\cos u$ auszudrücken. Um das Erste zu thun, setzen wir

$$\sin u = x \quad \text{mithin} \quad \cos u = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

und erhalten statt der Gleichung 6) die folgende

$$8)\quad \cos mu$$
$$= (m)_0 (1 - x)^{\frac{1}{2}m} - (m)_2 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}(m-2)} x^2 + (m)_4 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}(m-4)} x^4 - \ldots,$$

worin sich die verschiedenen Potenzen von $1 - x^2$ mittelst des binomischen Satzes entwickeln lassen. Hierbei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn nämlich m eine gerade Zahl ist, so werden $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}(m-2)$, $\frac{1}{2}(m-4)$ etc. zu ganzen positiven Zahlen und dann liefert das Binomialtheorem endliche Reihen; für ungerade m dagegen sind $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}(m-2)$ etc. Brüche und dann führt die binomische Entwickelung zu unendlichen Reihen. Um letztere zu vermeiden, beschränken wir uns vorläufig auf gerade m und haben dann

$$\cos mu$$
$$= (m)_0 \left[\left(\frac{m}{2}\right)_0 - \left(\frac{m}{2}\right)_1 x^2 + \left(\frac{m}{2}\right)_2 x^4 - \left(\frac{m}{2}\right)_3 x^6 + \ldots \right]$$
$$- (m)_2 \left[\left(\frac{m-2}{2}\right)_0 x^2 - \left(\frac{m-2}{2}\right)_1 x^4 + \left(\frac{m-2}{2}\right)_2 x^6 - \ldots \right]$$
$$+ (m)_4 \left[\left(\frac{m-4}{2}\right)_0 x^4 - \left(\frac{m-4}{2}\right)_1 x^6 + \ldots \right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*) Die obigen Formeln wurden schon 1590 von Vieta gefunden (*Responsio ad Adriani Romani problema* in den *Opp.* pag. 315).

Durch Vereinigung aller Glieder, welche die nämlichen Potenzen von x enthalten, gelangt man zu einem Resultate von folgender Form

9) $$\cos mu = A_0 - A_2 x^2 + A_4 x^4 - A_6 x^6 + \ldots,$$

darin ist

$$A_0 = (m)_0 \left(\frac{m}{2}\right)_0 = 1,$$

und irgend eine Potenz von x, z. B. x^{2k}, hat den Coefficienten

$$A_{2k} = (m)_0 \left(\frac{m}{2}\right)_k + (m)_2 \left(\frac{m-2}{2}\right)_{k-1} + (m)_4 \left(\frac{m-4}{2}\right)_{k-2} + \cdots$$
$$\cdots + (m)_{2k-2} \left(\frac{m-2k+2}{2}\right)_1 + (m)_{2k} \left(\frac{m-2k}{2}\right)_0.$$

Nach Formel 7) in §. 39 läſst sich die hier vorkommende endliche Reihe summiren, und es ist kürzer

$$A_{2k} = \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)\ldots(m^2-[2k-2]^2)}{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots(2k)}.$$

Substituiren wir die hiernach gebildeten Werthe von A_2, A_4, A_6 etc. in die Gleichung 9) und schreiben wieder $\sin u$ statt x, so haben wir folgende Formel

10) $$\cos mu = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2 u + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 u - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 u + \ldots;$$

darin muſs m eine gerade Zahl sein, und die Reihe ist soweit fortzusetzen, bis sie von selber abbricht.

Bei ungeraden m dividiren wir die Gleichung 8) durch $\cos u = \sqrt{1-x^2}$ und erhalten zunächst

$$\frac{\cos mu}{\cos u}$$
$$= (m)_0(1-x^2)^{\frac{1}{2}(m-1)} - (m)_2(1-x^2)^{\frac{1}{2}(m-3)}x^2 + (m)_4(1-x^2)^{\frac{1}{2}(m-5)}x^4 - \ldots.$$

Hier sind die Exponenten $\frac{1}{2}(m-1)$, $\frac{1}{2}(m-3)$, $\frac{1}{2}(m-5)$ etc. ganze positive Zahlen und daher lassen sich die Potenzen von $1-x^2$ in endliche Reihen entwickeln. Ordnet man, nachdem dieſs geschehen, Alles nach Potenzen von x, so gelangt man zu einer Gleichung von der Form

$$\frac{\cos mu}{\cos u} = 1 - a_2 x^2 + a_4 x^4 - a_6 x^6 + \ldots,$$

und zwar ist hier

$$a_{2k} = (m)_0 \left(\frac{m-1}{2}\right)_k - (m)_2 \left(\frac{m-3}{2}\right)_{k-1} + (m)_4 \left(\frac{m-5}{2}\right)_{k-2} - \ldots.$$

Nach der Formel 11) in §. 39 hat man dafür einfacher

$$a_{2k} = \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)(m^2 - 5^2)\dots(m^2 - [2k-1]^2)}{1.2.3.4.5.6\dots(2k)}$$

mithin aus der vorigen Gleichung

11) $$\cos mu = \cos u \left[1 - \frac{m^2 - 1^2}{1.2}\sin^2 u + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^3)}{1.2.3.4}\sin^4 u - \dots\right]$$

wobei m ungerade sein mufs.

Ähnliche Umwandlungen gestattet die Formel 7), welche für $\sin u = x$ lautet

12) $$\sin mu = (m)_1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}(m-1)} x - (m)_3 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}(m-3)} x^3 + \dots$$

Bei ungeraden m sind die Exponenten $\frac{1}{2}(m-1)$, $\frac{1}{2}(m-3)$ etc. ganze Zahlen, mithin lassen sich die Potenzen von $1 - x^2$ in endliche Reihen verwandeln, was ein Resultat von folgender Form giebt

$$\sin mu = B_1 x - B_3 x^3 + B_5 x^5 - \dots,$$

$$B_{2k+1} = (m)_1 \left(\frac{m-1}{2}\right)_k + (m)_3 \left(\frac{m-3}{2}\right)_{k-1} + (m)_5 \left(\frac{m-5}{2}\right)_{k-2} + \dots$$

Kürzer ist nach Formel 10) in §. 39

$$B_{2k+1} = \frac{m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)(m^2 - 5^2)\dots(m - [2k-1]^2)}{1.2.3.4\dots(2k+1)}$$

mithin

13) $$\sin mu = \frac{m}{1}\sin u - \frac{m(m^2 - 1^2)}{1.2.3}\sin^3 u + \frac{m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 u - \dots,$$

wobei m ungerade sein mufs.

Ist dagegen m eine gerade Zahl, so dividirt man erst die Gleichung 12) durch $\cos u = \sqrt{1 - x^2}$ und entwickelt in der nunmehrigen Gleichung

$$\frac{\sin mu}{\cos u} = (m)_1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}(m-2)} x - (m)_3 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}(m-4)} x^3 + \dots$$

die Potenzen von $1 - x^2$; man erhält ein Resultat von der Form

$$\frac{\sin mu}{\cos u} = b_1 x - b_3 x^3 + b_5 x^5 - \dots$$

$$b_{2k+1} = (m)_1 \left(\frac{m-2}{2}\right)_k + (m)_3 \left(\frac{m-4}{2}\right)_{k-1} + (m)_5 \left(\frac{m-6}{2}\right)_{k-2} + \dots$$

Nach Formel 12) in §. 39 reducirt sich diefs auf

$$b_{2k-1} = \frac{m(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)(m^2 - 6^2)\dots(m^2 - [2k]^2)}{1.2.3.4\dots(2k+1)}$$

und daher ist

$$14)\quad sin\, mu = cos\, u \left[\frac{m}{1} sin\, u - \frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3} sin^2 u + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5} sin^5 u - \ldots\right],$$

worin m eine gerade Zahl sein mufs*).

Durch ganz ähnliche Transformationen könnte man aus den Gleichungen 6) und 7) neue Gleichungen ableiten, in welchen die Reihen nach Potenzen von $cos\, u$ fortgehen; zu den nämlichen Resultaten gelangt man aber kürzer, wenn man in den Formeln 10) bis 14) $\frac{1}{2}\pi - u$ an die Stelle von u treten läfst. So erhält man z. B. aus No. 10), wo m eine gerade Zahl bezeichnet,

$$(-1)^{\frac{1}{2}m} cos\, mu$$
$$= 1 - \frac{m^2}{1.2} cos^2 u + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} cos^4 u - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} cos^6 u + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-[m-2]^2)}{1.2.3.4\ldots\ldots m} cos^m u,$$

und wenn man beiderseits mit $(-1)^{\frac{1}{2}m}$ multiplicirt, so ist bei umgekehrter Anordnung der Reihe

$$15)\quad cos\, mu = A_m\, cos^m u - A_{m-2}\, cos^{m-2} u + A_{m-4}\, cos^{m-4} u - \ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} A_2\, cos^2 u + (-1)^{\frac{1}{2}m}.$$

Irgend einer der Coefficienten, etwa A_{m-2k}, hat den Werth

$$A_{m-2k} = \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-[m-2k-2]^2)}{1.2.3.4\ldots\ldots(m-2k)},$$

welcher sich durch folgende Umformung vereinfachen läfst. Man hat

$$m^2 = 2 \,.\, m \,.\, \frac{m}{2}$$

$$m^2 - 2^2 = 2^2 \left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{m}{2}-1\right)$$

$$m^2 - 4^2 = 2^2 \left(\frac{m}{2}+2\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m^2 - (m-2k-2)^2 = 2^2(m-k-1)\,(k+1)$$

mithin

$$A_{m-2k}$$
$$= \frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots(\frac{1}{2}m+1)\frac{1}{2}m(\frac{1}{2}m-1)\ldots(k+2)(k+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m-2k)} m 2^{m-2k-1};$$

im Zähler sind hier alle ganzen Zahlen von $k+1$ bis $m-k-1$

*) Die obigen Umwandlungen haben viel Ähnlichkeit mit den in §. 40 vorgenommenen Transformationen; der Grund dieser Übereinstimmung wird sich später bei der Theorie des Imaginären zeigen.

mit einander multiplicirt, setzt man daher im Zähler und Nenner noch das Product $1 . 2 . 3 \ldots k$ zu, so wird

$$A_{m-2k} = \frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots 3 . 2 . 1}{1 . 2 \ldots (m-2k) . 1 . 2 \ldots k} m\, 2^{m-2k-1}.$$

$$= \frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1 . 2 . 3 \ldots k} m\, 2^{m-2k-1}.$$

Nur in dem Falle $k=0$ erleidet diese Schlufsweise eine Ausnahme; die vorhergehende Formel liefert dann unmittelbar

$$A_m = 2^{m-1}.$$

Nach diesen Erörterungen haben wir aus No. 15) die folgende, für gerade m gültige Formel:

$$\cos mu = 2^{m-1} \cos^m u - m\, 2^{m-3} \cos^{m-2} u + m\, 2^{m-5} \frac{m-3}{2} \cos^{m-4} u - \ldots\ldots$$

oder besser

16) $$2 \cos mu = (2 \cos u)^m - \frac{m}{1} (2 \cos u)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1 . 2} (2 \cos u)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1 . 2 . 3} (2 \cos u)^{m-6} + \ldots\ldots$$

In der Formel 13) lassen wir gleichfalls $\frac{1}{2}\pi - u$ an die Stelle von u treten und schreiben die Glieder rechter Hand in umgekehrter Ordnung; mit Rücksicht auf den Umstand, dafs jetzt m eine ungerade Zahl bedeutet, erhalten wir ein Resultat von der Form

$$\cos mu = A_m \cos^m u - A_{m-2} \cos^{m-2} u + A_{m-4} \cos^{m-4} u - \ldots.$$

und zwar ist

$$A_{m-2k} = \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-[m-2k-2]^2)}{1 . 2 . 3 \ldots (m-2k)}.$$

Zur Transformation dieses Bruches benutzen wir die identischen Gleichungen

$$m^2 - 1^2 = 2^2 \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m-1}{2}\right)$$

$$m^2 - 3^2 = 2^2 \left(\frac{m+3}{2}\right)\left(\frac{m-3}{2}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m^2 - (m-2k-2)^2 = 2^2 (m-k-1)(k+1),$$

aus denen folgt

$$A_{m-2k} = \frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m-1}{2} \ldots (k+2)(k+1)}{1 . 2 . 3 \ldots (m-2k)} m\, 2^{m-2k-1}.$$

Im Zähler steht die Reihe der natürlichen Zahlen von $k+1$ bis

$m-k-1$; setzen wir im Zähler und Nenner noch die Factorenreihe $1.2\ldots k$ hinzu, so erhalten wir nach Hebung der Factorenreihe $1.2\ldots(m-2k)$

$$A_{m-2k}=\frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k}m\,2^{m-2k-1}.$$

Für $k=0$ giebt die vorhergehende Gleichung $A_m=2^{m-1}$, es stimmen also die neuen Coefficientenwerthe vollkommen mit den früheren überein. Daher ist auch bei ungeraden m

$$17)\quad 2\cos mu=(2\cos u)^m-\frac{m}{1}(2\cos u)^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos u)^{m-4} -\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos u)^{m-6}+\ldots$$

d. h. die Formel für $2\cos mu$ bleibt bei ungeraden m die nämliche wie bei geraden m. In jedem Falle ist die Reihe soweit fortzusetzen, bis sie von selbst abbricht, so dafs negative Potenzen von $2\cos u$ auszuschliefsen sind.

Die Gleichungen 11) und 14) gestatten fast wörtlich dieselben Transformationen, und es wird daher die Angabe des Endresultates hinreichen. Man erhält sowohl für gerade als für ungerade m

$$18)\quad \sin mu =\sin u\Big[(2\cos u)^{m-1}-\frac{m-2}{1}(2\cos u)^{m-3}+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos u)^{m-5} -\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\cos u)^{m-7}+\ldots\Big].$$

wobei negative Potenzen von $2\cos u$ auszuschliefsen sind*).

§. 45.

Endliche Producte für Sinus und Cosinus.

I. Die bekannte goniometrische Formel

$$1)\quad \sin w=2\sin\frac{w}{2}\cos\frac{w}{2}$$

läfst sich auf folgende Weise benutzen um $\sin z$ in ein Product aus den Sinus und Cosinus kleinerer Bögen zu verwandeln.

Man hat zunächst

$$\sin z=2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2},$$

ferner, wenn rechter Hand $\sin\frac{1}{2}z$ wieder nach Formel 1) zerlegt wird,

*) Die Formeln 10) bis 18) sind von Jacob Bernoulli gefunden worden (*Mém. de l'Académie des sciences* 1702 oder *Opp.* T. II, No. 97).

$$\sin z = 2^2 \sin \frac{z}{4} \cos \frac{z}{2} \cos \frac{z}{4}.$$

Benutzt man wieder die Formel 1) für $w = \frac{1}{4}z$, so folgt

$$\sin z = 2^3 \sin \frac{z}{8} \cos \frac{z}{2} \cos \frac{z}{4} \cos \frac{z}{8};$$

auf diese Weise fortgehend gelangt man zu der allgemeinen Formel

2) $$\sin z = 2^n \sin \frac{z}{2^n} \cdot \cos \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2^2} \cos \frac{z}{2^3} \dots \cos \frac{z}{2^n},$$

worin n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet.

II. Eine Modification des vorigen Gedankens ist folgende. Statt der Formel 1) schreiben wir

3) $$\sin w = 2 \sin \frac{w}{2} \sin \frac{w+\pi}{2},$$

und haben zunächst

$$\sin z = 2 \sin \frac{z}{2} \sin \frac{z+\pi}{2}.$$

Wird nun rechter Hand jeder Sinus wieder nach No. 3) zerlegt, so ergiebt sich

$$\sin z = 2^3 \sin \frac{z}{4} \sin \frac{z+\pi}{4} \sin \frac{z+2\pi}{4} \sin \frac{z+3\pi}{4};$$

die Wiederholung dieses Verfahrens liefert

$$\sin z = 2^7 \sin \frac{z}{8} \sin \frac{z+\pi}{8} \sin \frac{z+2\pi}{8} \dots \sin \frac{z+7\pi}{8}.$$

Nach n-maliger Anwendung dieser Zerlegungsmethode findet sich, wenn $2^n = p$ gesetzt wird

$$\sin z = 2^{p-1} \sin \frac{z}{p} \sin \frac{z+\pi}{p} \sin \frac{z+2\pi}{p} \dots \sin \frac{z+(p-1)\pi}{p}$$

oder in kurzer, von selbst verständlicher Schreibweise

4) $$\sin z = 2^{p-1} s_0 s_1 s_2 \dots s_{p-1}.$$

Die Reihe der Factoren $s_0, s_1, s_2, \dots$ ordnen wir folgendermaafsen

$$s_0 \cdot s_1 s_{p-1} \cdot s_2 s_{p-2} \dots s_{\frac{1}{2}p-1} s_{\frac{1}{2}p+1} \cdot s_{\frac{1}{2}p},$$

so dafs, abgesehen von s_0 und $s_{\frac{1}{2}p}$, immer je zwei Factoren wie s_h und s_{p-h} zu einer Gruppe vereinigt werden. Dabei ist

$$s_h = \sin \frac{h\pi + z}{p}$$

$$s_{p-h} = \sin \frac{(p-h)\pi + z}{p} = \sin \frac{h\pi - z}{p}$$

mithin das eine Gruppe bildende Product

$$s_h s_{p-h} = \left(\sin \frac{h\pi}{p} \cos \frac{z}{p}\right)^2 - \left(\cos \frac{h\pi}{p} \sin \frac{z}{p}\right)^2 = \sin^2 \frac{h\pi}{p} - \sin^2 \frac{z}{p}.$$

Macht man hiervon Gebrauch für $h = 1, 2, 3 \ldots . \frac{1}{2}p - 1$, beachtet ferner, dafs

$$s_{\frac{1}{2}p} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{z}{p}\right) = \cos\frac{z}{p}$$

ist, und setzt zur Abkürzung

$$2^{n-1} - 1 = \frac{1}{2}p - 1 = q,$$

so erhält man aus der Gleichung 4) die folgende

$$5) \quad \sin z = 2^{p-1} \sin\frac{z}{p}\left(\sin^2\frac{\pi}{p} - \sin^2\frac{z}{p}\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{p} - \sin^2\frac{z}{p}\right) \ldots . \\ \ldots \ldots \left(\sin^2\frac{q\pi}{p} - \sin^2\frac{z}{p}\right)\cos\frac{z}{p}.$$

Bemerkenswerth ist derjenige specielle Fall dieser Formel, welcher sich ergiebt, wenn man beiderseits mit z dividirt und dann zur Grenze für unendlich abnehmende z übergeht; wegen

$$Lim\frac{\sin z}{z} = 1 \quad \text{und} \quad Lim\frac{\sin\frac{z}{p}}{z} = Lim\left\{\frac{1}{p}\cdot\frac{\sin\frac{z}{p}}{\frac{z}{p}}\right\} = \frac{1}{p}$$

folgt nämlich

$$6) \qquad 1 = \frac{2^{p-1}}{p}\sin^2\frac{\pi}{p}\sin^2\frac{2\pi}{p} \ldots . \sin^2\frac{q\pi}{p}.$$

Dividirt man endlich die Gleichung 5) durch No. 6), so kann man den Quotienten in folgender Form darstellen

$$7) \qquad \frac{\sin z}{p\sin\frac{z}{p}\cos\frac{z}{p}}$$

$$= \left\{1 - \left[\frac{\sin\frac{z}{p}}{\sin\frac{\pi}{p}}\right]^2\right\}\left\{1 - \left[\frac{\sin\frac{z}{p}}{\sin\frac{2\pi}{p}}\right]^2\right\} \ldots . \left\{1 - \left[\frac{\sin\frac{z}{p}}{\sin\frac{q\pi}{p}}\right]^2\right\},$$

an welche sich später eine wichtige Consequenz knüpfen wird.

III. Nach einem bekannten Satze, dessen Beweis man auch im Anhange findet, läfst sich die ganze, rationale und algebraische Function

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots . + a_n x^n$$

in ein Product verwandeln, sobald es gelingt, n specielle Werthe von x anzugeben, für welche $f(x)$ verschwindet. Sind nämlich x_1, x_2, x_3, ... x_n diese n Werthe, bei denen

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) \ldots = f(x_n) = 0$$

wird, so hat man

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n).$$

Hiervon läfst sich eine Anwendung auf die Gleichung 9) des vorigen Paragraphen machen; für $\sin u = x$ und bei geraden m hatten wir

$$\cos mu = 1 - A_2 x^2 + A_4 x^4 - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}m} A_m x^m,$$
$$A_m = 2^{m-1},$$

daher mufs sich $\cos mu$ auch in folgender Form darstellen lassen

$$\cos mu = (-1)^{\frac{1}{2}m} 2^{m-1} (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)$$

und zwar sind hier $x_1, x_2, \ldots x_m$ diejenigen m Specialwerthe von x, für welche $1 - A_2 x^2 + A_4 x^4 -$ etc., d. h. $\cos mu$ verschwindet. Sowie nun x den Sinus von u bedeutete, so können auch $x_1, x_2, \ldots x_m$ als die Sinus gewisser Winkel $u_1, u_2, \ldots u_m$ angesehen werden, und es ist folglich

$$\cos mu = (-1)^{\frac{1}{2}m} 2^{m-1} (\sin u - \sin u_1)(\sin u - \sin u_2) \ldots (\sin u - \sin u_m).$$

Die m Werthe $u_1, u_2, \ldots u_m$, für welche $\cos mu$ verschwindet, sind aber

$$+\frac{\pi}{2m}, \quad +\frac{3\pi}{2m}, \quad +\frac{5\pi}{2m}, \ldots + \frac{(m-1)\pi}{2m},$$
$$-\frac{\pi}{2m}, \quad -\frac{3\pi}{2m}, \quad -\frac{5\pi}{2m}, \ldots - \frac{(m-1)\pi}{2m},$$

und daher ist

$$\cos mu$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}m} 2^{m-1} \left(\sin u - \sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin u - \sin\frac{3\pi}{2m}\right) \ldots \left(\sin u - \sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)$$
$$\times \left(\sin u + \sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin u + \sin\frac{3\pi}{2m}\right) \ldots \left(\sin u + \sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)$$

oder, wenn man je zwei unter einander stehende Factoren zu einem Producte vereinigt und diesem das entgegengesetzte Vorzeichen giebt

$$\cos mu$$
$$= 2^{m-1} \left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 u\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 u\right) \ldots \left(\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - \sin^2 u\right).$$

Wendet man diese allgemeine Gleichung auf den speciellen Fall $u = 0$ an, so erhält man

8) $$1 = 2^{m-1} \sin^2\frac{\pi}{2m} \sin^2\frac{3\pi}{2m} \ldots \sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m},$$

und ferner, wenn man damit in die vorige Gleichung dividirt,

9) $$\cos mu$$
$$= \left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right\}\left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right\} \ldots \left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right\}.$$

Die Anzahl der Factoren beträgt $\frac{1}{2}m$, wobei jede Parenthese für einen Factor gerechnet wird.

Eine ähnliche Transformation kann mit der, für gerade m geltenden Gleichung 14) des vorigen Paragraphen vorgenommen werden. Man schreibt erst

$$\frac{\sin mu}{\sin u \cos u} = A_1 - A_3 x^2 + A_5 x^4 - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1} A_{m-1} x^{m-2},$$

worin

$$A_{m-1} = \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-[m-2]^2)}{1.2.3.4\ldots(m-1)} = 2^{m-1}.$$

ist, und erhält dann weiter

$$\frac{\sin mu}{\sin u \cos u}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}m-1} 2^{m-1} (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{m-1})$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}m-1} 2^{m-1} (\sin u - \sin u_1)(\sin u - \sin u_2)\ldots(\sin u - \sin u_{m-1}).$$

Die $m-1$ Bögen $u_1, u_2, \ldots u_{m-1}$, für welche die linke Seite d. h. $\sin mu$ verschwindet, sind im vorliegenden Falle

$$+\frac{2\pi}{2m}, \quad +\frac{4\pi}{2m}, \quad +\frac{6\pi}{2m}, \ldots + \frac{(m-2)\pi}{2m},$$

$$-\frac{2\pi}{2m}, \quad -\frac{4\pi}{2m}, \quad -\frac{6\pi}{2m}, \ldots - \frac{(m-2)\pi}{2m},$$

und man findet hiernach

$$\frac{\sin mu}{\sin u \cos u}$$

$$= 2^{m-1}\left(\sin^2\frac{2\pi}{2m} - \sin^2 u\right)\left(\sin^2\frac{4\pi}{2m} - \sin^2 u\right)\ldots\left(\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \sin^2 u\right).$$

Läſst man u in Null übergehen und berücksichtigt, daſs

$$Lim\,\frac{\sin mu}{\sin u} = Lim\,\frac{\frac{\sin mu}{u}}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{m}{1}$$

ist, so gelangt man zu der speciellen Gleichung

$$10) \qquad m = 2^{m-1} \sin^2\frac{2\pi}{2m} \sin^2\frac{4\pi}{2m} \ldots \sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}.$$

Indem man die vorhergehende Productenformel durch die letzte dividirt, erhält man noch

$$11) \qquad \frac{\sin mu}{\cos u}$$

$$= m \sin u \left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right\}\left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right\} \ldots \left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right\} {}^{*)}.$$

---

*) Setzt man $u = \frac{z}{m}$, so erhält man eine Verallgemeinerung von No. 7) in so fern

Auch die Gleichungen 12) und 13) können auf analoge Weise transformirt werden, und es wird die Angabe der Endresultate hinreichen, da die Methode immer dieselbe bleibt. Aus No. 13) findet man

12) $$m = 2^{m-1} \sin^2 \frac{2\pi}{2m} \sin^2 \frac{4\pi}{2m} \dots \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m},$$

13) $$\sin mu$$
$$= m \sin u \left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right\}\left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right\} \dots \left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}}\right\};$$

und aus No. 12)

14) $$1 = 2^{m-1} \sin^2 \frac{\pi}{2m} \sin^2 \frac{3\pi}{2m} \dots \sin^2 \frac{(m-2)\pi}{2m},$$

15) $$\frac{\cos mu}{\cos u}$$
$$= \left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \frac{\pi}{2m}}\right\}\left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m}}\right\} \dots \left\{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \frac{(m-2)\pi}{2m}}\right\},$$

wobei m immer eine ungerade Zahl bedeutet.

Dafs nun auch *sec mu*, *csc mu*, *tan mu* und *cot mu* in Form von Producten darstellbar sind, wird keiner näheren Erörterung bedürfen.

Bemerkenswerth ist noch eine aus No. 18) folgende Productenformel, bei welcher keine Unterscheidung von geraden und ungeraden m vorkommt. Die genannte Gleichung erlaubt nämlich

$$\frac{\sin mu}{\sin u}$$
$$= 2^{m-1} (\cos u - \cos u_1)(\cos u - \cos u_2) \dots (\cos u - \cos u_{m-1})$$

zu setzen, wo $u_1, u_2, \dots u_{m-1}$ diejenigen Specialwerthe von u sind, für welche *sin mu* verschwindet. Nimmt man dafür

$$\frac{\pi}{m}, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{3\pi}{m}, \dots \frac{(m-1)\pi}{m},$$

so erhält man zunächst

$$\frac{\sin mu}{\sin u}$$
$$= 2^{m-1} \left(\cos u - \cos \frac{\pi}{m}\right)\left(\cos u - \cos \frac{2\pi}{m}\right) \dots \left(\cos u - \cos \frac{(m-1)\pi}{m}\right).$$

---

nämlich m eine beliebige gerade Zahl ist, während p in No. 7) eine Potenz der 2 sein mufs. Dagegen bietet die Ableitung der speciellen Formel den Vortheil, dafs sie die Kenntnifs der zu Anfang des Abschnittes III erwähnten Zerlegung von $f(x)$ nicht voraussetzt.

Weiter ist

$$cos\frac{\pi}{m}=-cos\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)=-cos\frac{(m-1)\pi}{m},$$

$$cos\frac{2\pi}{m}=-cos\left(\pi-\frac{2\pi}{m}\right)=-cos\frac{(m-2)\pi}{m},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$cos\frac{(m-1)\pi}{m}=-cos\left(\pi-\frac{(m-1)\pi}{m}\right)=-cos\frac{\pi}{m};$$

substituirt man die rechts stehenden Ausdrücke in die vorige Productenformel und schreibt die Factoren in umgekehrter Ordnung, so wird

$$\frac{sin\,mu}{sin\,u}$$

$$=2^{m-1}\left(cos\,u+cos\frac{\pi}{m}\right)\left(cos\,u+cos\frac{2\pi}{m}\right)\cdots\left(cos\,u+cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right)$$

und durch Multiplication beider Gleichungen

$$\left(\frac{sin\,mu}{sin\,u}\right)^2$$

$$=2^{2m-2}\left(cos^2u-cos^2\frac{\pi}{m}\right)\left(cos^2u-cos^2\frac{2\pi}{m}\right)\cdots\left(cos^2u-cos^2\frac{(m-1)\pi}{m}\right).$$

Jeder einzelne Factor rechter Hand läfst sich mittelst der Formel

$$cos^2u-cos^2\alpha=sin(\alpha+u)\,sin(\alpha-u)$$

in zwei Factoren zerlegen; diefs giebt

$$\left(\frac{sin\,mu}{sin\,u}\right)^2$$

$$=2^{m-1}sin\left(\frac{\pi}{m}+u\right)sin\left(\frac{2\pi}{m}+u\right)sin\left(\frac{3\pi}{m}+u\right)\cdots sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}+u\right)$$

$$\times 2^{m-1}sin\left(\frac{\pi}{m}-u\right)sin\left(\frac{2\pi}{m}-u\right)sin\left(\frac{3\pi}{m}-u\right)\cdots sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}-u\right).$$

Die Anwendung der Formel $sin\,v=sin(\pi-v)$ zeigt, dafs die Factoren der zweiten Reihe mit denen erster Reihe identisch sind, wenn man letztere in umgekehrter Ordnung nimmt; daraus folgt durch Wurzelziehung

$$\frac{sin\,mu}{sin\,u}=\pm 2^{m-1}sin\left(\frac{\pi}{m}+u\right)sin\left(\frac{2\pi}{m}+u\right)\cdots sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}+u\right).$$

Um über das Vorzeichen entscheiden zu können, gehen wir zur Grenze für verschwindende u über; in der entstehenden Gleichung

$$m=\pm 2^{m-1}sin\frac{\pi}{m}\,sin\frac{2\pi}{m}\cdots sin\frac{(m-1)\pi}{m}$$

sind alle vorkommenden Bögen zwischen 0 und π enthalten, mithin

deren Sinus positiv, und hieraus folgt augenblicklich, dafs nur das positive Zeichen Geltung hat. Diefs giebt

16) $$m = 2^{m-1}\, sin\,\frac{\pi}{m}\, sin\,\frac{2\pi}{m}\, sin\,\frac{3\pi}{m} \ldots sin\,\frac{(m-1)\pi}{m},$$

und nach dem Vorigen

17) $$sin\, mu$$
$$= 2^{m-1}\, sin\, u\, sin\left(\frac{\pi}{m} + u\right) sin\left(\frac{2\pi}{m} + u\right) \ldots sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m} + u\right).$$

Hieraus lassen sich auch die früheren Productenformeln für $sin\, mu$ wieder herleiten, wenn man auf die Unterscheidung gerader und ungerader m eingeht*).

§. 46.

Die unendlichen Reihen für Cosinus und Sinus.

In Formel 4) §. 44 setzen wir $u = \frac{z}{m}$, bezeichnen mit k eine beliebige gerade Zahl $< m$ und zerlegen die rechts stehende Reihe auf folgende Weise:

1) $$\frac{cos\, z}{\left(cos\,\frac{z}{m}\right)^m} = 1 - (m)_2 \left(tan\,\frac{z}{m}\right)^2 + (m)_4 \left(tan\,\frac{z}{m}\right)^4 - \ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}k-1} (m)_{k-2} \left(tan\,\frac{z}{m}\right)^{k-2} + (-1)^{\frac{1}{2}k} (m)_k \left(tan\,\frac{z}{m}\right)^k S,$$
$$S = 1 - \frac{(m-k)(m-k-1)}{(k+1)(k+2)} \left(tan\,\frac{z}{m}\right)^2$$
$$+ \frac{(m-k)\ldots(m-k-3)}{(k+1)\ldots(k+4)} \left(tan\,\frac{z}{m}\right)^4 - \ldots\ldots;$$

zur Abkürzung sei

2) $$\frac{m-k}{k+1}\, tan\,\frac{z}{m} = q_1,\quad \frac{m-k-1}{k+2}\, tan\,\frac{z}{m} = q_2,\quad \frac{m-k-2}{k+3}\, tan\,\frac{z}{m} = q_3,$$
u. s. w.

mithin

3) $$S = 1 - q_1 q_2 + q_1 q_2 q_3 q_4 - q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 + \ldots\ldots$$

Da m und k nicht von z abhängen und m nur gröfser als k sein mufs, so kann man sich z als gegeben vorstellen und k und m willkürlich wählen, jedoch in der Weise, dafs

$$m > k > z \quad \text{und zugleich} \quad m\, tan\,\frac{z}{m} < k$$

*) Die Productenformeln verdankt man Euler (*Introductio in Analysin infinitorum* T. I).

ist. Die letztere Bedingung läfst sich jederzeit erfüllen; bei unendlich wachsenden m convergirt nämlich $m \tan \frac{z}{m}$ gegen die Grenze z, welche vorausgesetztermaafsen weniger als k beträgt, folglich mufs $m \tan \frac{z}{m}$ bei hinreichend grofsen m kleiner als k werden und bleiben *). Nach diesen Bestimmungen ist

$$\frac{m-k}{k+1} \tan \frac{z}{m} = \left(1 - \frac{k}{m}\right) \frac{m \tan \frac{z}{m}}{k+1} < \left(1 - \frac{k}{m}\right) \frac{k}{k+1} < 1$$

d. h.

$$q_1 < 1;$$

auf gleiche Weise hat man

$$\frac{m-k-1}{k+2} \tan \frac{z}{m} = \left(1 - \frac{k+1}{m}\right) \frac{m \tan \frac{z}{m}}{k+2} < \left(1 - \frac{k+1}{m}\right) \frac{k}{k+2} < 1$$

d. h.

$$q_2 < 1,$$

und überhaupt ersieht man, dafs alle die Gröfsen q_1, q_2, q_3, q_4 etc. positive echte Brüche sind; mithin ist auch

$$4) \qquad 1 > q_1 q_2 > q_1 q_2 q_3 q_4 > q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 > \cdots\cdots$$

Die Summe einer endlichen alternirenden Reihe $u_0 - u_1 + u_2 - u_3 +$ etc., in welcher jedes Glied gröfser als das nächstfolgende ist, beträgt aber (bei jeder beliebigen Gliederzahl) weniger als der erste Summand u_0 und mehr als die beiden ersten Glieder $u_0 - u_1$; in der Anwendung auf Formel 3) unter Rücksicht auf No. 4) folgt nun $S < 1$ und $S > 1 - q_1 q_2$, mithin ist S ein positiver echter Bruch, welcher ϱ heifsen möge.

---

*) Man kann übrigens leicht solche m finden, welche $m \tan \frac{z}{m} < k$ machen; es ist nämlich

$$m \tan \frac{z}{m} = \frac{m \sin \frac{z}{m}}{\sqrt{1 - \left(\sin \frac{z}{m}\right)^2}} < \frac{z}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{m}\right)^2}}.$$

Wählt man erst $k > z$, dann

$$m > \frac{z}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{k}\right)^2}},$$

o folgt aus dieser Ungleichung

$$\frac{z}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{m}\right)^2}} < k \quad \text{und um so mehr} \quad m \tan \frac{z}{m} < k.$$

Nach dieser Restuntersuchung kehren wir zur Gleichung 1) zurück und geben ihr folgende Gestalt

$$\frac{\cos z}{\left(\cos\frac{z}{m}\right)^m}=1-\frac{1-\frac{1}{m}}{1\,.\,2}\left(m\tan\frac{z}{m}\right)^2+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(m\tan\frac{z}{m}\right)^4-\dots$$

$$\dots+(-1)^{\frac{1}{2}k-1}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-3}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,(k-2)}\left(m\tan\frac{z}{m}\right)^{k-2}$$

$$+(-1)^{\frac{1}{2}k}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,k}\left(m\tan\frac{z}{m}\right)^{k}\varrho.$$

Lassen wir m ins Unendliche wachsen, ohne k zu ändern, so nähern sich die Brüche $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots \frac{k-1}{m}$ der gemeinschaftlichen Grenze Null, ferner ist nach Formel 8) in §. 10

$$Lim\left(m\tan\frac{z}{m}\right)=z,$$

und nach Formel 10) desselben Paragraphen

$$Lim\left[\left(\cos\frac{z}{m}\right)^m\right]=1,$$

mithin ergiebt sich zusammen

$$5)\quad \cos z=1-\frac{1}{1\,.\,2}z^2+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}z^4-\dots\dots$$

$$\dots+(-1)^{\frac{1}{2}k-1}\frac{1}{1\,.\,2\dots(k-2)}z^{k-2}+(-1)^{\frac{1}{2}k}\frac{\varrho}{1\,.\,2\dots k}z^k.$$

Diese Formel stimmt mit dem in No. 3) §. 20 erhaltenen Resultate überein, wenn k für z geschrieben und die gerade Zahl $k=4p+2$ gesetzt wird.

Die Formel 5) in §. 44 gestattet eine ganz ähnliche Behandlung. Substituirt man nämlich $u=\frac{z}{m}$ und versteht unter k eine ungerade Zahl $< m$, so hat man

$$6)\quad \frac{\sin z}{\left(\cos\frac{z}{m}\right)^m}=(m)_1\tan\frac{z}{m}-(m)_3\left(\tan\frac{z}{m}\right)^3+\dots\dots$$

$$\dots+(-1)^{\frac{1}{2}(k-3)}(m)_{k-2}\left(\tan\frac{z}{m}\right)^{k-2}+(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}(m)_k\left(\tan\frac{z}{m}\right)^k S,$$

$$S=1-\frac{(m-k)(m-k-1)}{(k+1)(k+2)}\left(\tan\frac{z}{m}\right)^2+\frac{(m-k)\dots(m-k-3)}{(k+1)\dots(k+4)}\left(\tan\frac{z}{m}\right)^4-\dots$$

Für die mit S bezeichnete Summe gelten wörtlich dieselben Schlüsse

wie vorhin; ihr Werth ist ein positiver echter Bruch ϱ, wenn $k > z$ und m so grofs gewählt wird, dafs die Ungleichungen

$$m > k > z \quad \text{und} \quad m \tan \frac{z}{m} < k$$

zusammen stattfinden. Die Formel 6) läfst sich schreiben

$$\frac{\sin z}{\left(\cos \frac{z}{m}\right)^m} = \frac{1}{1} m \tan \frac{z}{m} - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}\left(m \tan \frac{z}{m}\right)^3 + \ldots.$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(k-3)} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-3}{m}\right)}{1.2\ldots.(k-2)}\left(m \tan \frac{z}{m}\right)^{k-2}$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1.2\ldots\ldots k}\left(m \tan \frac{z}{m}\right)^{k} \varrho,$$

und hieraus folgt bei constantem k und endlich wachsendem m

$$7) \quad \sin z = \frac{1}{1} z - \frac{1}{1.2.3} z^3 + \frac{1}{1.2\ldots5} z^5 - \ldots..$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(k-3)} \frac{1}{1.2\ldots(k-2)} z^{k-2} + (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{\varrho}{1.2\ldots k} z^k,$$

was mit der Formel 4) in §. 20 übereinstimmt.

Die unter No 5) und 7) erhaltenen Resultate bringen wir auf die Form

$$\cos z - (-1)^{\frac{1}{2}k} \varrho \frac{z^k}{1.2.3\ldots k}$$

$$= 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{z^{k-2}}{1.2\ldots(k-2)},$$

$$\sin z - (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \varrho \frac{z^k}{1.2.3\ldots k}$$

$$= \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2..5} - \ldots. + (-1)^{\frac{1}{2}(k-3)} \frac{z^{k-2}}{1.2\ldots(k-2)},$$

und lassen die ganze Zahl k ins Unendliche wachsen; es ist dann für jedes endliche z

$$Lim \frac{z^k}{1.2.3\ldots k} = 0,$$

gleichzeitig werden die vorkommenden Reihen unendlich, und es ergeben sich die beiden eleganten Formeln*)

*) Die Reihen für $\cos z$ und $\sin z$ sind von Newton gefunden worden (Brief von Oldenburg an Leibnitz v. 12. April 1676). Der Gedanke, jene Reihen aus den Formeln für $\cos mu$ und $\sin mu$ herzuleiten, wurde zuerst von Euler benutzt (*Introductio in Anal. inf.* T. I, §. 134), aber in nicht hinreichend strenger Weise ausgeführt.

8) $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2\ldots 6} + \ldots,$$

9) $$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Zufolge der Unbeschränktheit des z ist hiermit das Problem gelöst, den Cosinus oder Sinus jedes beliebigen Bogens zu finden. Wollte man nach den Formeln 8) und 9) eine Tafel der Cosinus und Sinus berechnen, so würde man höchstens $z = \frac{1}{2}\pi = 1{,}57\ldots$ zu setzen haben, und dann convergiren die Reihen sehr stark. Aus $\sin z$ und $\cos z$ lassen sich die übrigen goniometrischen Functionen von z herleiten, in den obigen Formeln liegt daher auch die Lösung der allgemeinen Aufgabe, die goniometrischen Functionen irgend eines Bogens zu finden; doch werden wir nachher noch besondere Reihen für $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$ und $\csc z$ entwickeln.

§. 47.

Unendliche Producte für Sinus und Cosinus.

So wie im vorigen Paragraphen aus den endlichen Reihen für $\sin z$ und $\cos z$ unendliche Reihen für dieselben Functionen hergeleiet wurden, so dienen auch die in §. 45 entwickelten endlichen Producte als Ausgangspunkte zur Herleitung unendlicher Producte für die goniometrischen Functionen.

I. In der Formel 2) des §. 45 sei für den Augenblick

$$\frac{z}{2^n} = \vartheta \quad \text{mithin} \quad 2^n = \frac{z}{\vartheta},$$

es ist dann

$$\sin z = \frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\, z \cos\frac{z}{2} \cos\frac{z}{2^2} \cos\frac{z}{2^3} \ldots \cos\frac{z}{2^n}.$$

Läfst man nun n in's Unendliche wachsen, so convergirt ϑ gegen die Null und das Verhältnifs $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ gegen die Einheit; es wird folglich

1) $$\sin z = z \cos\frac{z}{2} \cos\frac{z}{2^2} \cos\frac{z}{2^3} \ldots\ldots$$

Dieses Resultat ist zwar theoretisch von Interesse, gewährt aber keinen praktischen Nutzen, weil sich hiernach $\sin z$ nur dann berechnen liefse, wenn aufser dem Bogen z auch die Cosinus der Bögen $\frac{1}{2}z$, $\frac{1}{4}z$, $\frac{1}{8}z$, ... bekannt wären.

II. Der Formel 7) in §. 45 geben wir zur Abkürzung folgende Gestalt

2) $$\frac{\sin z}{p \sin \frac{z}{p} \cos \frac{z}{p}}$$
$$= (1 - T_1)(1 - T_2)\, 1 - T_3) \ldots \ldots (1 - T_q),$$
worin irgend eine der Gröfsen T, etwa T_h, durch die Formel
$$T_h = \left[\frac{\sin \frac{z}{p}}{\sin \frac{h\pi}{p}}\right]^2$$
bestimmt ist. Unter k eine beliebige ganze positive Zahl $< q$ verstehend, zerlegen wir die in No. 2) vorkommenden q Factoren in zwei Gruppen, deren erste k Factoren, und deren zweite die $q - k$ übrigen Factoren enthält; dem entsprechend setzen wir

3) $$\frac{\sin z}{p \sin \frac{z}{p} \cos \frac{z}{p}}$$
$$= (1 - T_1)(1 - T_2)(1 - T_3) \ldots (1 - T_k) \,.\, R,$$
$$R = (1 - T_{k+1})(1 - T_{k+2}) \ldots \ldots (1 - T_q)$$
und richten die Aufmerksamkeit zunächst auf das Ergänzungsproduct R.

In den Nennern der mit T_{k+1}, T_{k+2}, ... T_q bezeichneten Brüche kommen die Bögen vor
$$\frac{k+1}{p}\pi, \quad \frac{k+2}{p}\pi, \ldots \ldots \frac{q}{p}\pi = \frac{q}{2q+2}\pi,$$
die sämmtlich $< \frac{1}{2}\pi$ sind; in den Zählern steht immer der Bogen $\frac{z}{p}$, welcher kleiner als alle jene Bögen ist, sobald

4) $$k > \frac{z}{\pi}$$

genommen wird, denn zufolge dieser Wahl ist $\frac{z}{p} < \frac{k}{p}\pi$ mithin um so mehr kleiner als die vorhin genannten Bögen. Da nun im ersten Quadranten dem gröfseren Bogen der gröfsere Sinus entspricht, so sind unter der Voraussetzung 4)
$$\frac{\sin \frac{z}{p}}{\sin \frac{(k+1)\pi}{p}}, \quad \frac{\sin \frac{z}{p}}{\sin \frac{(k+2)\pi}{p}}, \ldots \frac{\sin \frac{z}{p}}{\sin \frac{q\pi}{p}}$$
echte Brüche, mithin liegt auch jede der Gröfsen T_{k+1}, T_{k+2} ... zwischen 0 und 1. Dasselbe gilt von den Differenzen $1 - T_{k+1}$, $1 - T_{k+2}$, ..., folglich ist

$$(1 - T_{k+1})(1 - T_{k+2}) \dots (1 - T_q) < 1$$

d. h.

5) $$R < 1.$$

Um zweitens eine Gröfse zu erhalten, die weniger als R ausmacht, benutzen wir den leicht beweisbaren Satz, dafs ein Product von der Form $(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \dots$ mehr als die Differenz $1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots)$ beträgt, falls $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ positive echte Brüche sind*); hiernach gilt die Ungleichung

6) $$R > 1 - (T_k + T_{k+1} + \dots + T_q),$$

die sich auf folgende Weise vereinfachen läfst. Es ist identisch

$$\tfrac{1}{2}\pi \sin\alpha - \alpha = \alpha(1 - \sin\alpha)\sin\alpha + (\tan\alpha - \alpha)\cos^2\alpha$$
$$+ \left[(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) - \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\right]\sin\alpha;$$

liegt nun der Bogen α im ersten Quadranten, so sind die Differenzen

$$1 - \sin\alpha, \quad \tan\alpha - \alpha, \quad (\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) - \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)$$

positiv, mithin besteht die rechte Seite der vorigen Gleichung aus drei positiven Summanden, woraus folgt

$$\tfrac{1}{2}\pi \sin\alpha > \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sin\alpha} < \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Für $\alpha = \frac{h\pi}{p}$ ist weiter, falls $\frac{h\pi}{p}$ einen Bogen des ersten Quadranten bezeichnet

$$\frac{1}{\left(\sin\frac{h\pi}{p}\right)^2} < \frac{p^2}{4h^2}$$

und wenn man diese Ungleichung mit der folgenden

$$\left(\sin\frac{z}{p}\right)^2 < \frac{z^2}{p^2}$$

multiplicirt, so erhält man vermöge der Bedeutung von T_h

$$T_h < \frac{z^2}{4} \cdot \frac{1}{h^2};$$

hieraus ergiebt sich unmittelbar

---

*) Aus der identischen Gleichung

$$(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1\varepsilon_2$$

folgt nämlich durch Weglassung des positiven $\varepsilon_1\varepsilon_2$

$$(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) > 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Multiplicirt man mit dem positiven Factor $1 - \varepsilon_2$, so wird

$$(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_3)$$
$$> 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_3$$

und um so mehr bei Weglassung des letzten Summanden

$$(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_3) > 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3);$$

hier würde man wieder mit $1 - \varepsilon_4$ multipliciren u. s. w.

7) $$T_{k+1} + T_{k+2} + \cdots + T_q$$
$$< \frac{z^2}{4}\left\{\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \frac{1}{(k+3)^2} + \cdots + \frac{1}{q^2}\right\},$$

Zufolge der Bemerkung, dafs

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \frac{1}{(k+2)^2} < \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}, \ldots$$

mithin

$$\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \cdots + \frac{1}{q^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{p} < \frac{1}{k}$$

ist, wird die Ungleichung 7) einfacher und zugleich stärker nämlich

$$T_{k+1} + T_{k+2} + \cdots + T_q < \frac{z^2}{4k}.$$

Subtrahirt man beide Seiten von der Einheit und beachtet die Ungleichung 6), so findet man

8) $$R > 1 - \frac{z^2}{4k}.$$

Die Relationen 5) und 8) geben zu erkennen, dafs

$$R = 1 - \frac{\varrho z^2}{4k}$$

gesetzt werden kann, wo ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch bezeichnet.

Nach diesen Erörterungen ist leicht zu übersehen, was aus der Gleichung 3) wird, sobald p in's Unendliche wächst und dagegen k constant bleibt; man hat nämlich

$$Lim\left(p \sin\frac{z}{p}\right) = z,$$

$$Lim\, T_h = Lim\left[\frac{p \sin\frac{z}{p}}{p \sin\frac{h\pi}{p}}\right]^2 = \left(\frac{z}{h\pi}\right)^2;$$

der Werth von R ändert sich nicht und daher wird

9) $$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$
$$\cdots\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varrho z^2}{4k}\right).$$

Um eine analoge Formel für $\cos z$ zu erhalten, setze man in No. 9) das eine Mal $2k$ für k, das andere Mal $\frac{1}{2}z$ für z und multiplicire die letzte Gleichung mit 2; diefs giebt

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varrho' z^2}{8k}\right),$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}z = z\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{6^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varrho'' z^2}{16k}\right),$$

wo ϱ' und ϱ'' nicht näher bekannte positive echte Brüche sind. Dividirt man die erste Gleichung durch die zweite, so ergiebt sich

10) $$\cos\tfrac{1}{2}z =$$
$$\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)\frac{1-\dfrac{\varrho' z^2}{8k}}{1-\dfrac{\varrho'' z^2}{16k}},$$

und diefs ist die gesuchte Gleichung, in welcher man nur $2z$ für z zu schreiben braucht, wenn man eine Productenformel für $\cos z$ haben will.

Der Gleichung 9) ertheilen wir folgende Gestalt

$$\frac{\sin z}{1-\dfrac{\varrho z^2}{4k}} = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

und gehen dann zur Grenze für unendlich wachsende k über. Der Grenzwerth der linken Seite ist $\sin z$, rechter Hand wird das Product, welches aufser z noch k Factoren enthält, zu einem unendlichen Producte*), mithin

11) $$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

Aus der Gleichung 10) ergiebt sich durch gleiche Behandlung

12) $$\cos\tfrac{1}{2}z = \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

---

*) Ein unendliches Product convergirt oder divergirt, jenachdem es sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert oder nicht. Die Entscheidung hierüber ist leicht, wenn man die Logarithmen nimmt; convergirt nämlich die Reihe

$$lv_0 + lv_1 + lv_2 + lv_3 + \cdots$$

und ist ihre Summe von Null verschieden, so convergirt auch das Product

$$v_0 v_1 v_2 v_3 \cdots\cdots;$$

in jedem anderen Falle divergirt das letztere. Dafs das obige Product convergirt, versteht sich nach der Herleitung von selbst, könnte aber auch direct bewiesen werden.

oder, wenn man $2z$ an die Stelle von z treten läfst,

$$13)\qquad \cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\cdot$$

Die Gleichungen 11) und 13) führen zu dem bemerkenswerthen Resultate, dafs alle sechs goniometrischen Functionen unter der Form unendlicher Producte dargestellt werden können*).

In dem speciellen Falle $z = \frac{1}{2}\pi$ giebt die Formel 11)

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdots\cdot$$

und umgekehrt

$$14)\qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots\cdot;$$

auf ähnliche Weise erhält man für $x = \frac{1}{4}\pi$

$$15)\qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{16}{17} \cdots\cdot,$$

überhaupt gelangt man immer zu einem unendlichen Producte für die Ludolph'sche Zahl, wenn man z gleich einem aliquoten Theile der Peripherie setzt, dessen Sinus bekannt ist.

§. 48.

Reihen für $l \sin z$, $l \cos z$ u. s. w.

Aus den im vorigen Paragraphen entwickelten Productenformeln 11) und 13) lassen sich wieder Reihenformeln ableiten, wenn man beiderseits die Logarithmen nimmt; um hierbei die Logarithmen negativer Factoren zu vermeiden, beschränken wir in No. 11) z auf das Intervall 0 bis $+\pi$, und in No. 13) auf das Intervall $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$. Hiernach gelten folgende Gleichungen

$$1)\qquad l \sin z = lz + l\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) + \cdots,$$
$$0 < z < \pi,$$

$$2)\qquad l \cos z = l\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{5^2\pi^2}\right) + \cdots\cdot,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

welche wieder als Ausgangspunkte zur Entwickelung weiterer goniometrischer Reihen dienen.

---

*) Dieses Resultat hat Johann Bernoulli gefunden (*Opp.* T. IV, No. 152); zu der speciellen Formel 14) war schon früher Wallis gelangt mittelst einer sogen. Interpolation (*Arithmetica infinitorum*, propos. 191).

In No. 1) denken wir uns $z+\vartheta$ statt z geschrieben und ϑ so klein gewählt, dafs auch $z+\vartheta$ zwischen 0 und π liegt; von der neu entstandenen Gleichung subtrahiren wir die Gleichung 1) und haben

$$3)\quad l\left(\frac{\sin(z+\vartheta)}{\sin z}\right)=l\left(1+\frac{\vartheta}{z}\right)+l\left(1-\frac{2z\vartheta+\vartheta^2}{\pi^2-z^2}\right)$$
$$+l\left(1-\frac{2z\vartheta+\vartheta^2}{2^2\pi^2-z^2}\right)+l\left(1-\frac{2z\vartheta+\vartheta^2}{3^2\pi^2-z^2}\right)+\dots.$$

Bei hinreichend kleinen ϑ ist $\frac{\vartheta}{z}$ ein echter Bruch, mithin

$$l\left(1+\frac{\vartheta}{z}\right)=\frac{\vartheta}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta}{z}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\vartheta}{z}\right)^2-\dots.$$

und hieraus folgt bei positiven ϑ

$$\frac{\vartheta}{z}>l\left(1+\frac{\vartheta}{z}\right)>\frac{\vartheta}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta}{z}\right)^2$$

oder auch, wenn ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch bezeichnet,

$$4)\qquad l\left(1+\frac{\vartheta}{z}\right)=\frac{\vartheta}{z}-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{\vartheta}{z}\right)^2.$$

Unter der Voraussetzung eines echt gebrochenen positiven x ist ferner

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right)=x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\dots.$$

mithin

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right)>x$$

und zugleich

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right)<x+\tfrac{1}{2}(x^2+x^3+x^4+\dots.)$$

d. i.

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right)<x+\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{1-x};$$

man ist daher berechtigt

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right)=x+\frac{\varrho_n}{2}\,\frac{x^2}{1-x}$$

oder

$$l(1-x)=-x-\frac{\varrho_n}{2}\,\frac{x^2}{1-x}$$

zu setzen, wo ϱ_n einen positiven echten Bruch bezeichnet. Für

$$x=\frac{2z\vartheta+\vartheta^2}{n^2\pi^2-z^2}$$

ergiebt sich hieraus

$$5)\quad l\left(1-\frac{2z\vartheta+\vartheta^2}{n^2\pi^2-z^2}\right)=-\frac{2z\vartheta+\vartheta^2}{n^2\pi^2-z^2}-\frac{\varrho_n}{2}\frac{(2z\vartheta+\vartheta^2)^2}{[n^2\pi^2-z^2][n^2\pi^2-(z+\vartheta)^2]}$$

und wenn wir die Gleichungen 4) und 5) zur Transformation von No. 3) benutzen, so haben wir nach beiderseitiger Division mit ϑ

$$6)\quad \frac{1}{\vartheta}l\left(\frac{\sin(z+\vartheta)}{\sin z}\right)=\frac{1}{z}-\frac{\varrho\vartheta}{2z^2}$$
$$-\frac{2z+\vartheta}{\pi^2-z^2}-\frac{\varrho_1}{2}\cdot\frac{(2z+\vartheta)^2\vartheta}{[\pi^2-z^2]\,[\pi^2-(z+\vartheta)^2]}$$
$$-\frac{2z+\vartheta}{2^2\pi^2-z^2}-\frac{\varrho_2}{2}\cdot\frac{(2z+\vartheta)^2\vartheta}{[2^2\pi^2-z^2][2^2\pi^2-(z+\vartheta)^2]}$$
$$-\frac{2z+\vartheta}{3^2\pi^2-z^2}-\frac{\varrho_3}{2}\cdot\frac{(2z+\vartheta)^2\vartheta}{[3^2\pi^2-z^2][3^2\pi^2-(z+\vartheta)^2]}$$
$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In der ersten Verticalcolonne hat ϑ den Coefficienten

$$\frac{\varrho}{2z^2}+\frac{1}{\pi^2-z^2}+\frac{1}{2^2\pi^2-z^2}+\frac{1}{3^2\pi^2-z^2}+\ldots;$$

diese Reihe convergirt und daher ist ihre Summe eine endliche Gröfse, welche P heifsen möge. In der zweiten Verticalcolonne findet sich $\frac{1}{2}(2z+\vartheta)^2\vartheta$ multiplicirt mit

$$\frac{\varrho_1}{[\pi^2-z^2]\,[\pi^2-(z+\vartheta)]^2}+\frac{\varrho_2}{[2^2\pi^2-z^2]\,[2^2\pi^2-(z+\vartheta)^2]}$$
$$+\frac{\varrho_3}{[3^2\pi^2-z^2]\,[3^2\pi^2-(z+\vartheta)^2]}+\ldots$$

und da vorstehende Reihe selbst in dem Falle convergirt, wo man alle Zähler durch die gröfsere Einheit ersetzt, so ist ihre Summe von endlichem Werthe, welcher Q heifsen möge. Statt No. 6) haben wir jetzt

$$7)\qquad \frac{1}{\vartheta}l\left(\frac{\sin(z+\vartheta)}{\sin z}\right)$$
$$=\frac{1}{z}-\frac{2z}{\pi^2-z^2}-\frac{2z}{2^2\pi^2-z^2}-\frac{2z}{3^2\pi^2-z^2}-\ldots$$
$$-P\vartheta-\tfrac{1}{2}Q\,(2z+\vartheta)^2\vartheta$$

Um auch die linke Seite in eine andere Form zu bringen, bemerken wir, dafs der Quotient $\frac{\sin(z+\vartheta)}{\sin z}$ um so weniger von der Einheit differirt, je kleiner ϑ ist, wir setzen daher

$$8)\qquad \frac{\sin(z+\vartheta)}{\sin z}=1+\delta$$

und erhalten

$$\frac{1}{\vartheta}\, l\left(\frac{\sin(z+\vartheta)}{\sin z}\right) = \frac{l(1+\delta)}{\vartheta} = \frac{l(1+\delta)}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\vartheta}$$

$$= l[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]\cdot\frac{\sin(z+\vartheta)-\sin z}{\vartheta\,.\,\sin z}$$

oder auch, wenn die Differenz der Sinus in ein Product aus Cosinus und Sinus verwandelt wird,

$$\frac{1}{\vartheta}\, l\left(\frac{\sin(z+\vartheta)}{\sin z}\right) = l[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]\,\frac{2\cos(z+\frac{1}{2}\vartheta)\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\vartheta\,.\,\sin z}.$$

Die Gleichung 7) wird jetzt zur folgenden

$$l[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]\,\frac{\cos(z+\frac{1}{2}\vartheta)}{\sin z}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\frac{1}{2}\vartheta}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2-z^2} - \frac{2z}{2^2\pi^2-z^2} - \frac{2z}{3^2\pi^2-z^2} - \dots$$

$$- P\vartheta - \tfrac{1}{2}Q\,(2z+\vartheta)^2\,\vartheta,$$

und hier kann man den Übergang zur Grenze für unendlich abnehmende ϑ leicht ausführen. Da nämlich δ gleichzeitig mit ϑ gegen die Null convergirt, so ist

$$Lim\left\{l[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]\right\} = le = 1,$$

$$Lim\,\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\frac{1}{2}\vartheta} = 1,$$

ferner haben $P\vartheta$ und $\frac{1}{2}Q\,(2z+\vartheta)^2\,\vartheta$ zur gemeinschaftlichen Grenze die Null, und so bleibt

$$9)\qquad \cot z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2-z^2} - \frac{2z}{2^2\pi^2-z^2} - \frac{2z}{3^2\pi^2-z^2} - \dots$$

Der anfänglichen Voraussetzung gemäfs gilt diese Gleichung zunächst nur für solche z, die zwischen 0 und π enthalten sind; da aber die vorkommende Reihe immer convergirt, wenn nicht gerade z ein Vielfaches von π ist, so läfst sich vermuthen, dafs die Gültigkeit der obigen Formel noch weiter reichen werde. Um diefs zu untersuchen, bezeichnen wir die Summe der Reihe mit $f(z)$ und zerlegen folgendermaafsen

$$f(z) = \frac{1}{z} - \left(\frac{1}{\pi-z} - \frac{1}{\pi+z}\right) - \left(\frac{1}{2\pi-z} - \frac{1}{2\pi+z}\right) - \dots$$

$$\dots - \left(\frac{1}{n\pi-z} - \frac{1}{n\pi+z}\right)$$

$$- 2z\left\{\frac{1}{(n+1)^2\pi^2-z^2} + \frac{1}{(n+2)^2\pi^2-z^2} + \dots\right\};$$

im Falle $0 < z < \pi$ ist dann nach No. 9) $f(z) = \cot z$. Liegt aber z

zwischen π und 2π, so kann man $z = \pi + u$ setzen, wo $0 < u < \pi$ ist, und hat dann

$$f(\pi + u) = \frac{1}{\pi + u} + \frac{1}{u} + \frac{1}{2\pi + u} - \frac{1}{\pi - u} + \frac{1}{3\pi + u} - \frac{1}{2\pi - u} + \cdots$$

$$\cdots - \frac{1}{(n-1)\pi - u} + \frac{1}{(n+1)\pi + u}$$

$$- 2(\pi + u)\left\{\frac{1}{(n+1)^2\pi^2 - (\pi + u)^2} + \frac{1}{(n+2)^2\pi^2 - (\pi + u)^2} + \cdots\right\}$$

oder bei anderer Anordnung

$$f(\pi + u) - \frac{1}{n\pi + u} - \frac{1}{(n+1)\pi + u}$$

$$+ 2(\pi + u)\left\{\frac{1}{(n+1)^2\pi^2 - (\pi + u)^2} + \frac{1}{(n+2)^2\pi^2 - (\pi + u)^2} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{u} - \frac{2u}{\pi^2 - u^2} - \frac{2u}{2^2\pi^2 - u^2} - \cdots - \frac{2u}{(n-1)^2\pi^2 - u^2}.$$

Läfst man die willkürliche ganze Zahl n ins Unendliche wachsen, so findet man leicht, dafs die Summe der Reihe

$$\frac{1}{(n+1)^2\pi^2 - (\pi + u)^2} + \frac{1}{(n+2)^2\pi^2 - (\pi + u)^2} + \cdots$$

der Grenze Null nähert und daher wird

$$f(\pi + u) = f(u),$$

d. i. weil u zwischen 0 und π liegt

$$f(\pi + u) = \cot u = \cot(\pi + u).$$

Die Gleichung 9) bleibt also richtig, wenn für z ein Bogen zwischen π und 2π genommen wird oder wenn der vorkommende Bogen um π wächst; sie gilt daher successiv für alle Bögen zwischen 0 und π, π und 2π, 2π und 3π u. s. f. Bei negativen z ändern beide Seiten der Gleichung ihre Vorzeichen und liefern nichts Anderes wie für gleichgrofse positive z. Damit ist die Allgemeingültigkeit der Formel 9) bewiesen.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich an die Formel 12) in §. 47 knüpfen, doch gelangt man zum Endresultate kürzer auf folgendem Wege. Aus No. 9) folgt, wenn man $\frac{1}{2}z$ für z schreibt,

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{2^2\pi^2 - z^2} - \frac{2z}{4^2\pi^2 - z^2} - \frac{2z}{6^2\pi^2 - z^2} - \cdots$$

zieht man hiervon die Gleichung 9) ab und berücksichtigt die goniometrische Formel

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}z - \cot z = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}z,$$

so erhält man nach der Multiplication mit 2

$$10)\quad \tan\tfrac{1}{2}z = \frac{4z}{\pi^2 - z^2} + \frac{4z}{3^2\pi^2 - z^2} + \frac{4z}{5^2\pi^2 - z^2} + \cdots$$

oder auch

$$11)\quad tan\, z = \frac{2z}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - z^2} + \frac{2z}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - z^2} + \frac{2z}{(\frac{5}{2}\pi)^2 - z^2} + \cdots$$

Mit Hülfe der goniometrischen Formel

$$cot\, z + tan\, \tfrac{1}{2}z = csc\, z$$

ergiebt sich aus den Gleichungen 9) und 10)

$$12)\quad csc\, z = \frac{1}{z} + \frac{2z}{\pi^2 - z^2} - \frac{2z}{2^2\pi^2 - z^2} + \frac{2z}{3^2\pi^2 - z^2} - \cdots$$

Um schliefslich eine Reihe für $sec\, z$ zu erhalten, bringen wir die Reihe 12) auf die Form

$$csc\, z = \frac{1}{z} + \left\{\frac{1}{\pi - z} - \frac{1}{\pi + z}\right\} - \left\{\frac{1}{2\pi - z} - \frac{1}{2\pi + z}\right\}$$
$$+ \left\{\frac{1}{3\pi - z} - \frac{1}{3\pi + z}\right\} - \cdots$$

und lassen $\frac{1}{2}\pi - z$ an die Stelle von z treten; durch Vereinigung der einander entsprechenden Brüche folgt dann

$$13)\quad sec\, z = \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - z^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - z^2} + \frac{5\pi}{(\frac{5}{2}\pi)^2 - z^2} - \cdots$$

§. 49.

Transformation der vorigen Reihen.

Wir kehren zur Formel 1) des vorigen Paragraphen zurück und stellen sie in folgender Gestalt dar

$$l\left(\frac{sin\, z}{z}\right) = l\left(1 - \frac{z^2}{1^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) + \cdots,$$

wobei alle Logarithmanden positiv sind, wenn z zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Unter dieser Voraussetzung sind $\frac{z}{\pi}, \frac{z}{2\pi}, \frac{z}{3\pi}$ etc. echte Brüche, mithin lassen sich alle auf der rechten Seite vorkommenden Logarithmen mittelst der Formel

$$l(1 - x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \cdots,$$
$$-1 < x < +1,$$

in Reihen verwandeln, die nach Potenzen von z fortschreiten; diefs giebt

$$l\left(\frac{sin\, z}{z}\right) = -\frac{z^2}{1^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{z^4}{1^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{z^6}{1^6\pi^6} - \cdots$$
$$-\frac{z^2}{2^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{z^4}{2^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{z^6}{2^6\pi^6} - \cdots$$
$$-\frac{z^2}{3^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{z^4}{3^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{z^6}{3^6\pi^6} - \cdots$$
$$- \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Die vorstehende Doppelreihe genügt den Bedingungen, unter welchen die Anordnung nach Verticalcolonnen erlaubt ist (§. 34), daher hat man auch

$$l\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\frac{z^2}{\pi^2}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)\frac{z^4}{\pi^4}$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)\frac{z^6}{\pi^6}$$
$$-\;\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Setzt man zur Abkürzung

1) $$S_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots,$$

wobei die Reihe für $m > 1$ convergirt, so wird die vorige Gleichung zur folgenden

2) $$l\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\frac{1}{1}\frac{S_2}{\pi^2}z^2 - \frac{1}{2}\frac{S_4}{\pi^4}z^4 - \frac{1}{3}\frac{S_6}{\pi^6}z^6 - \cdots.$$

Auf ganz ähnliche Weise läſst sich die Gleichung

$$l\cos z = l\left(1-\frac{4z^2}{1^2\pi^2}\right)+l\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)+l\left(1-\frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right)+\cdots$$

behandeln, wenn z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt; mit Hülfe der Abkürzung

3) $$T_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\cdots$$

findet man

4) $$l\cos z = -\frac{1}{1}\frac{2^2T_2}{\pi^2}z^2 - \frac{1}{2}\frac{2^4T_4}{\pi^4}z^4 - \frac{1}{3}\frac{2^6T_6}{\pi^6}z^6 - \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Die Summen T_2, T_4, T_6 etc. können übrigens durch die vorigen S_2, S_4, S_6 etc. ausgedrückt werden; nach Formel 1) ist nämlich

$$\frac{1}{2^m}S_m = \frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\cdots,$$

und wenn man dieſs von No. 1) subtrahirt, so bleibt

$$\frac{2^m-1}{2^m}S_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\cdots = T_m.$$

Demnach kann man statt No. 4) schreiben

5) $$l\cos z = -\frac{1}{1}\frac{(2^2-1)S_2}{\pi^2}z^2 - \frac{1}{2}\frac{(2^4-1)S_4}{\pi^4}z^4 - \frac{1}{3}\frac{(2^6-1)S_6}{\pi^6}z^6 - \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi;$$

dasselbe Resultat erhält man aus No. 2) mit Hülfe der identischen Gleichung

$$l\,cos\,z = l\left(\frac{sin\,2z}{2z}\right) - l\left(\frac{sin\,z}{z}\right).$$

Die Formeln 2) und 5) lösen das Problem, die Logarithmen der goniometrischen Functionen direct aus dem Bogen herzuleiten.

Um auch die für *cot z, tan z, csc z* und *sec z* gefundenen Reihen in Potenzenreihen umzusetzen, nehmen wir zuerst die Gleichung 9) in §. 48 vor und schreiben dafür

$$cot\,z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{(1\pi)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z}{1\pi}\right)^2} - \frac{2z}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2\pi}\right)^2} - \cdots.$$

Unter der Voraussetzung, dafs z zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, sind $\frac{z}{\pi}, \frac{z}{2\pi}, \frac{z}{3\pi}$ etc. echte Brüche, und dann lassen sich die einzelnen Reihenglieder nach der Formel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

$$-1 < x < +1$$

entwickeln; man erhält zunächst eine Doppelreihe, welche nach Potenzen von z angeordnet werden darf und zu folgendem Resultate führt:

$$6)\qquad cot\,z = \frac{1}{z} - \frac{2S_2}{\pi^6}z - \frac{2S_4}{\pi^4}z^3 - \frac{2S_6}{\pi^6}z^5 - \cdots,$$

$$-\pi < z < +\pi.$$

Die Gleichung 11) in §. 48 gestattet eine ähnliche Behandlung, wobei $-\frac{1}{2}\pi < z < +\frac{1}{2}\pi$ vorauszusetzen ist; kürzer gelangt man mittelst der Formel

$$cot\,z - 2\,cot\,2z = tan\,z$$

zum Ziele, nämlich

$$7)\qquad tan\,z = \frac{2(2^2-1)S_2}{\pi^2}z + \frac{2(2^4-1)S_4}{\pi^4}z^3 + \frac{2(2^6-1)S_6}{\pi^6}z^5 + \cdots,$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Läfst man $\frac{1}{2}z$ an die Stelle von z treten und addirt die neue Gleichung zu No. 6) so erhält man

$$8)\qquad csc\,z = \frac{1}{z} + \frac{(2^1-1)S_2}{\pi^2}z + \frac{(2^3-1)S_4}{\pi^4}z^3 + \frac{(2^5-1)S_6}{\pi^6}z^5 + \cdots,$$

$$-\pi < z < +\pi.$$

Die Reihe für $sec\,z$ entsteht aus der Reihe in No. 13) des vorigen Paragraphen, wenn man letztere in folgender Form darstellt

$$sec\,z = \frac{4}{1\pi} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{2z}{1\pi}\right)^2} - \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{2z}{3\pi}\right)^2} + \cdots$$

und die einzelnen Brüche nach Potenzen von z entwickelt, wobei vorauszusetzen ist, dafs z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Man erhält vorerst eine Doppelreihe, welche indessen eine andere Anordnung gestattet; setzt man zur Abkürzung

9) $$U_m = \frac{1}{1^m} - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \cdots,$$

so ergiebt sich

10) $$sec\,z = \frac{2^2 U_1}{\pi} + \frac{2^4 U_3}{\pi^3} z^2 + \frac{2^6 U_5}{\pi^5} z^4 + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Es liegt sehr nahe, die Formeln 6), 7), 8) und 10) einer Art von Probe zu unterwerfen, welche auf der Bemerkung beruht, dafs die links stehenden Functionen als gebrochene Functionen gelten können, nämlich

$$cot\,z = \frac{cos\,z}{sin\,z}, \quad tan\,z = \frac{sin\,z}{cos\,z} \text{ u. s. w.},$$

und dafs folglich die obigen Reihen den Quotienten aus den Reihen für $cos\,z$ und $sin\,z$ gleichgelten müssen. Multiplicirt man z. B. die Gleichung 7) mit

$$cos\,z = 1 - \frac{1}{1\,.\,2} z^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} z^4 - \cdots,$$

so kann das Resultat nicht verschieden sein von

$$sin\,z = \tfrac{1}{1} z - \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} z^3 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,5} z^5 - \cdots,$$

und darin liegt ein Mittel, um den Coefficienten der Reihe 7) auf andere Weise zu bestimmen. Schreiben wir statt No. 7) kürzer

11) $$tan\,z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \cdots,$$

so erhalten wir durch die erwähnte Multiplication

$$sin\,z = a_1 z + \left(a_3 + \frac{a_1}{1\,.\,2}\right) z^3 + \left(a_5 - \frac{a_3}{1\,.\,2} + \frac{a_1}{1\,.\,2\,.\,.\,4}\right) z^5 + \cdots$$

und nun führt die Vergleichung mit der Sinusreihe zu folgenden Relationen

$$a_1 = \frac{1}{1},$$

$$a_3 - \frac{a_1}{1\,.\,2} = -\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$a_5 - \frac{a_3}{1\,.\,2} + \frac{a_1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = +\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5},$$

. . . .

oder überhaupt für irgend ein ungerades n

12) $$a_n - \frac{a_{n-2}}{1\,.\,2} + \frac{a_{n-4}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{a_{n-6}}{1\,.\,2\ldots 6} + \ldots\ldots = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}.$$

Diese Gleichungen geben der Reihe nach

$$a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{2}{1\,.\,2\,.\,3}, \quad a_5 = \frac{16}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}, \ldots,$$

wonach es passend erscheint, die Zähler 1, 2, 16, etc. mit besonderen Buchstaben zu bezeichnen. Wir setzen daher

$$a_n = \frac{\tau_n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}$$

und dem entsprechend nach No. 11)

13) $$\tan z = \frac{\tau_1}{1} z + \frac{\tau_3}{1\,.\,2\,.\,3} z^3 + \frac{\tau_5}{1\,.\,2\,.\,.\,5} z^5 + \ldots, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi;$$

die Formel 12) geht nach Multiplication mit $1\,.\,2\,.\,3\ldots n$ über in

$$\tau_n - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\tau_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\tau_{n-4} - \ldots = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

oder, weil n eine ungerade Zahl ist,

14) $$\tau_n - (n)_2\,\tau_{n-2} + (n)_4\,\tau_{n-4} - \ldots = \sin \tfrac{1}{2} n\pi.$$

Für $n = 1, 3, 5$ etc. ergeben sich hieraus die schon bekannten Werthe $\tau_1 = 1$, $\tau_3 = 2$, $\tau_5 = 16$ u. s. w., auch übersieht man leicht, daſs alle τ ganze rationale positive Zahlen sind. Durch Vergleichung der Formeln 7) und 13) erhält man die Relationen

$$\frac{2(2^2-1)S_2}{\pi^2} = \frac{\tau_1}{1}, \quad \frac{2(2^4-1)S_4}{\pi^4} = \frac{\tau_3}{1\,.\,2\,.\,3}, \ldots$$

welche zur Kenntniſs der Summen S_2, S_4 etc. führen, nämlich

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad S_4 = \frac{\pi^4}{90}, \quad S_6 = \frac{\pi^6}{945}, \ldots$$

und überhaupt für ganze positive k

15) $$\frac{1}{1^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \ldots = \frac{\tau_{2k-1}\,\pi^{2k}}{2(2^{2k}-1)\,.\,1\,.\,2\ldots(2k-1)}.$$

Zu einem ähnlichen Resultate gelangt man durch Multiplication der Gleichung 10) mit der Entwickelung von $\cos z$. Setzt man nämlich

16) $$\sec z = 1 + \frac{\tau_2}{1\,.\,2} z^2 + \frac{\tau_4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} z^4 + \ldots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

so erhält man durch die angedeutete Multiplication

$$1 = 1 + \left(\frac{\tau_2}{1.2} - \frac{1}{1.2}\right) z^2 + \left(\frac{\tau_4}{1.2.3.4} - \frac{\tau_2}{1.2} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.4}\right) z^4 + \ldots$$

und hier müssen die Coefficienten von z^2, z^4, z^6 etc. der Null gleich sein. Demnach ist für gerade n

$$\frac{\tau_n}{1\,.\,2 \ldots n} - \frac{\tau_{n-2}}{1\,.\,2\,.\,.\,(n-2)} \cdot \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{\tau_{n-4}}{1\,.\,2\,.\,.\,(n-4)} \cdot \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots = 0$$

oder durch Multiplication mit $1\,.\,2 \ldots n$ und wenn man $\sin \frac{1}{2} n\pi$ für 0 schreibt

17) $$\tau_n - (n)_2\, \tau_{n-2} + (n)_4\, \tau_{n-4} - \ldots = \sin \tfrac{1}{2} n\pi.$$

Wie man sieht, gilt für die in der Secantenreihe vorkommenden Coefficienten das nämliche Bildungsgesetz wie für die Coefficienten in der Tangentenreihe; die Werthe $n = 2, 4, 6$ etc. geben der Reihe nach $\tau_2 = 1$, $\tau_4 = 5$, $\tau_6 = 61$ etc. Die Vergleichung von No. 10) mit No. 16) führt noch zu den Relationen

$$U_1 = \frac{\pi}{2^2}, \quad U_3 = \frac{\tau_2\, \pi^3}{2^4\,.\,1\,.\,2} = \frac{\pi^3}{32}, \quad U_5 = \frac{\tau_4\, \pi^5}{2^6\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = \frac{5\pi^5}{1536}, \ldots$$

und überhaupt

18) $$\frac{1}{1^{2k+1}} - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \ldots = \frac{\tau_{2k}\, \pi^{2k+1}}{2^{2k+2}\, 1\,.\,2 \ldots (2k)}.$$

Theoretisch bemerkenswerth ist die erste dieser Gleichungen, nämlich

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots,$$

wenn sie auch wegen der sehr langsamen Convergenz der Reihe nicht zur Berechnung von π dienen kann.

In Folge verschiedener Anwendungen, welche die Summen S_2, S_4, S_6 etc. bei anderweiten Untersuchungen gefunden haben, ist es üblich geworden, die Quotienten

$$\frac{S_2}{2^1\pi^2}, \quad \frac{S_4}{2^3\pi^4}, \quad \frac{S_6}{2^5\pi^6}, \ldots$$

auf besondere Weise zu bezeichnen; man setzt nämlich

19) $$\frac{S_{2k}}{2^{2k-1}\, \pi^{2k}} = \frac{B_{2k-1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (2k)}$$

und nennt B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoulli'schen Zahlen. Dieselben sind leicht aus den Coefficienten τ_1, τ_3, τ_5 etc. herzuleiten, denn der Vergleich von No. 19) mit No. 15) giebt

$$B_{2k-1} = \frac{k\,\tau_{2k-1}}{2^{2k-1}(2^{2k}-1)}$$

mithin für $k = 1, 2, 3$ etc.

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_3 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{1}{42},\quad B_7 = \frac{1}{30},\quad B_9 = \frac{5}{66},$$

$$B_{11} = \frac{691}{2730},\quad B_{13} = \frac{7}{6},\quad B_{15} = \frac{3617}{510},\quad B_{17} = \frac{43867}{798} \text{ u. s. w.}$$

Nach dieser Bezeichnung ist

20) $$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2^2 B_1}{1\,.\,2} z - \frac{2^4 B_3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} z^3 - \frac{2^6 B_5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} z^5 - \dots,$$
$$-\pi < z < +\pi;$$

21) $$\tan z = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1\,.\,2} z + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} z^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} z^5 + \dots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi;$$

22) $$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{2(2^1-1)B_1}{1\,.\,2} z + \frac{2(2^3-1)B_3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} z^3 + \frac{2(2^5-1)B_5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} z^5 + \dots,$$
$$-\pi < z < +\pi.$$

Der Symmetrie wegen schreiben Manche auch B_2, B_4, B_6 etc. statt der Secantencoefficienten τ_2, τ_4, τ_6 etc.

Das Gesammtergebniſs dieser Untersuchungen besteht in dem Satze, daſs alle sechs goniometrischen Functionen in Potenzenreihen verwandelbar sind, wenn der Bogen, von Null ab gerechnet, nicht weiter ausgedehnt wird, als die betreffenden Functionen sich continuirlich ändern*).

---

*) Der gröſste Theil dieser Formeln ist von Euler entwickelt worden, jedoch ohne Angabe der Grenzen für deren Gültigkeit (*Introd. in Anal. inf.* T. I); die Bestimmung dieser Grenzen verdankt man Cauchy (*Cours d'Anal. algèbr.*).

Capitel IX.

Die cyclometrischen Reihen.

§. 50.

Die Reihen für *arcsin x*, *arccos x* u. s. w.

Um eine Reihe für *arcsin x* zu erhalten, gehen wir auf den in §. 19 bewiesenen Satz zurück, dafs *arcsin x* der Grenzwerth ist, welchem sich der Ausdruck

$$\frac{x}{n}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{n}\right)^2}}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}}\right]$$

bei unendlich wachsenden n nähert oder dafs

$$1)\qquad arcsin\, x+\varepsilon$$
$$=\frac{x}{n}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{n}\right)^2}}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}}\right]$$

gesetzt werden kann, wenn man unter ε eine Gröfse versteht, welche bei unendlich wachsenden n die Null zur Grenze hat. Die rechte Seite der vorstehenden Gleichung bringen wir mit Hülfe des binomischen Satzes auf eine andere Form; es ist nämlich für echt gebrochene z

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=1+\tfrac{1}{2}z^2+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}z^4+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}z^6+\dots$$
$$\dots+\frac{1\,.\,3\,.\,5\dots(2k-3)}{2\,.\,4\,.\,6\dots(2k-2)}z^{2k-2}$$
$$+\frac{1\,.\,3\dots(2k-1)}{2\,.\,4\dots.(2k)}z^{2k}\left\{1+\frac{2k+1}{2k+2}z^2+\frac{(2k+1)\,(2k+3)}{(2k+2)\,(2k+4)}z^4+\dots\right\};$$

die Summe der zuletzt eingeklammerten Reihe ist positiv und kleiner als

$$1+z^2+z^4+z^6+\dots=\frac{1}{1-z^2},$$

sie kann folglich mit

$$\frac{\varrho}{1-z^2}$$

bezeichnet werden, wenn man unter ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch versteht. Die nunmehrige Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^6 + \dots$$
$$\dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-3)}{2 \cdot 4 \dots (2k-2)}z^{2k-2} + \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots (2k)}\,\frac{\varrho z^{2k}}{1-z^2}$$

benutzen wir zur Transformation der rechten Seite von No. 1), indem wir der Reihe nach

$$z = \frac{x}{n},\quad \frac{2x}{n},\quad \frac{3x}{n},\ \dots\ \frac{(n-1)x}{n}$$

und $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots \varrho_{n-1}$ für ϱ setzen; diefs giebt

$$\begin{aligned}
&\operatorname{arcsin} x + \varepsilon \\
= x &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}x^3 \\
&+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1^4+2^4+3^4+\dots+(n-1)^4}{n^5}x^5 \\
&+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1^6+2^6+3^6+\dots+(n-1)^6}{n^7}x^7 \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-3)}{2 \cdot 4 \dots (2k-2)} \cdot \frac{1^{2k-2}+2^{2k-2}+\dots+(n-1)^{2k-2}}{n^{2k-1}}x^{2k-1} \\
&+ \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots (2k)} \left\{ \frac{\varrho_1\, 1^{2k}}{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2} + \frac{\varrho_2\, 2^{2k}}{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2} + \dots \right. \\
&\qquad \left. \dots + \frac{\varrho_{n-1}\,(n-1)^{2k}}{1-\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2} \right\} \frac{x^{2k+1}}{n^{2k+1}}
\end{aligned}$$

Da x die Einheit nicht überschreiten kann, so sind die Nenner

$$1-\left(\frac{x}{n}\right)^2,\quad 1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2,\ \dots\ 1-\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2$$

positiv und sämmtlich gröfser als $1-x^2$, mithin werden alle in der eingeklammerten Reihe vorkommenden Brüche zu grofs, wenn man ihre Nenner gleich $1-x^2$ und statt $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1}$ die Einheit setzt. Ferner sind jene Brüche positiv, und daher liegt ihre Summe zwischen Null und

$$\frac{1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+\dots+(n-1)^{2k}}{1-x^2};$$

verstehen wir unter ϱ einen gewissen positiven echten Bruch, so ist nach diesen Bemerkungen

$$\begin{aligned} & arcsin\, x + \varepsilon \\ = x & + \frac{1}{2} \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} x^3 \\ & + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4}{n^5} x^5 \\ & + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + (n-1)^6}{n^7} x^7 \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-3)}{2 \cdot 4 \ldots (2k-2)} \cdot \frac{1^{2k-2} + 2^{2k-2} + \ldots + (n-1)^{2k-2}}{n^{2k-1}} x^{2k-1} \\ & + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2k)} \cdot \frac{1^{2k} + 2^{2k} + \ldots + (n-1)^{2k}}{n^{2k+1}} \cdot \frac{\varrho\, x^{2k+1}}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Es hat nunmehr keine Schwierigkeit, zur Grenze für unendlich wachsende n überzugehen; in diesem Falle wird nämlich $Lim\, \varepsilon = 0$ und für jedes ganze positive p

$$Lim \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

mithin

$$2)\quad arcsin\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-3)}{2 \cdot 4 \ldots (2k-2)}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\frac{\varrho}{1-x^2},$$
$$0 < \varrho < 1,$$

wobei der letzte Summand den Rest der Reihe darstellt.

Um hieraus eine unendliche Reihe für *arcsin* x abzuleiten, geben wir der Gleichung 2) die Form

$$\begin{aligned} & arcsin\, x - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k)} \frac{\varrho x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)} \\ = & \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots \\ & \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k-2)} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} \end{aligned}$$

und lassen die bisher willkürliche ganze positive Zahl k ins Unendliche wachsen. Unter der Voraussetzung, dafs x ein echter Bruch ist, haben wir $Lim\, (x^{2k+1}) = 0$, und da ferner

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k)} \frac{\varrho}{(2k+1)(1-x^2)}$$

eine endliche Gröfse bleibt, so ergiebt sich

3) $$arcsin\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^7}{7} + \dots.$$
$$-1 < x < +1.$$

Die hier vorkommende Reihe convergirt noch für $x = \pm 1$ und mufs daher in diesem Falle eine bestimmte endliche Summe haben; ob letztere $= arcsin\,(\pm 1)$ ist, läfst sich aber aus dem Vorigen nicht erkennen und mufs daher besonders untersucht werden. Bezeichnet u einen Bogen des ersten Quadranten, so gilt die Gleichung

$$sin\,\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 - cos\,u}{2}} \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}u = arcsin\sqrt{\frac{1 - cos\,u}{2}},$$

worin das Wurzelzeichen im absoluten Sinne zu nehmen ist; für $sin\,u = x$ wird $cos\,u = \sqrt{1 - x^2}$, $u = arcsin\,x$, mithin

$$\tfrac{1}{2} arcsin\,x = arcsin\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{2}} = arcsin\,y,$$

wobei y zur Abkürzung dient. Läfst man x von 0 bis 1 gehen, so durchläuft y das Intervall 0 bis $\sqrt{\frac{1}{2}}$, mithin kann $arcsin\,y$ nach Formel 3) entwickelt werden, nämlich

$$\frac{1}{2} arcsin\,x = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \dots$$
$$= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{2}} + \tfrac{1}{6}\left[\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{2}}\right]^3 + \dots$$

und diese Gleichung gilt von $x = 0$ bis $x = +1$ inclusive, weil der gröfste Werth von y immer noch weniger als die Einheit beträgt. Nach der ersten Formel auf Seite 163 läfst sich die Wurzel

$$\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{2}}$$

für alle, die Einheit nicht übersteigenden x in eine Potenzenreihe entwickeln, dasselbe gilt von den verschiedenen Potenzen dieser Wurzel, und man hat daher

$$\frac{1}{2} arcsin\,x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^3 + \frac{7}{256}x^5 + \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{64}x^5 + \dots\right)$$
$$+ \frac{3}{40}\left(\frac{1}{32}x^5 + \dots\right)$$
$$+ \dots\dots$$

Diese Doppelreihe genügt den Bedingungen, welche nach §. 34 erforderlich sind, um die Reihenglieder in Verticalcolonnen zusammen-

nehmen zu dürfen, und daher ist für alle x von $x = 0$ bis $x = +1$ inclusive

$$arcsin\, x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \ldots .$$

Zufolge des in §. 31 bewiesenen Satzes mufs diese Reihe identisch mit No. 3) sein; man gelangt also zu keinem der Form nach neuen Resultate, wohl aber erfährt man, dafs die Gleichung 3) auf das Intervall $x = 0$ bis $x = +1$ ausgedehnt werden darf, wenn sie früher auch nur von $x = 0$ bis $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ gegolten hätte. Da beide Seiten derselben für negative x gleichzeitig negativ werden, so bleibt sie auch von $x = 0$ bis $x = -1$ richtig.

Aus No. 3) lassen sich Reihen zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl herleiten, wenn man dem x einen solchen Zahlwerth ertheilt, dafs $arcsin\, x$ einen bekannten aliquoten Theil von π beträgt; so erhält man für $x = 1$

$$4) \qquad \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots .$$

und für $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \,.\, 2^3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{1}{5 \,.\, 2^5} + \ldots ,$$

welche Reihe für die numerische Rechnung stark genug convergirt.

Mit Hülfe der Relation

$$arccos\, x = \tfrac{1}{2}\pi - arcsin\, x$$

erhält man leicht eine Reihe für $arccos\, x$, nämlich

$$5) \qquad arccos\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{x^5}{5} - \ldots ,$$

wobei man für $\frac{1}{2}\pi$ seinen Werth aus No. 4) setzen kann.

Aus den Gleichungen 3) und 5) ergeben sich wieder unendliche Reihen für $arccsc\, x$ und $arcsec\, x$. Bezeichnet nämlich x die Cosecante eines zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogens u, so hat man

$$csc\, u = x, \quad sin\, u = \frac{1}{x}$$

mithin, wenn beide Gleichungen nach u aufgelöst werden,

$$arccsc\, x = arcsin \frac{1}{x};$$

die rechte Seite läfst sich nach No. 3) entwickeln, wenn man $\frac{1}{x}$ für x schreibt und beachtet, dafs $\frac{1}{x}$ nie die Einheit übersteigt.

Ist ferner u ein zwischen 0 und π liegender Bogen, x seine Secante, so gelten die Gleichungen

$$sec\, u = x; \quad cos\, u = \frac{1}{x},$$

$$arcsec\, x = arccos\, \frac{1}{x},$$

wo die rechte Seite nach Formel 5) entwickelt werden kann.

§. 51.

Die Reihen für *arctan x* und *arccot x*.

Zur Entwickelung einer Reihe für *arctan x* benutzen wir den in §. 18 bewiesenen Satz, dafs *arctan x* als der Grenzwerth betrachtet werden kann, welchem sich der Ausdruck

$$\frac{x}{n}\left[1 + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2}\right]$$

bei unendlich wachsenden n nähert, und dafs hiernach die Gleichung besteht (§. 18, No. 12)

1) $$arctan\, x = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 \cdots$$
$$\cdots - \frac{1}{4k-1}x^{4k-1} + \frac{\varrho}{4k+1}x^{4k+1},$$

worin ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch bezeichnet. Aus No. 1) folgt nämlich

$$arctan\, x - \varrho\frac{x^{4k+1}}{4k+1}$$
$$= \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots\cdots - \frac{1}{4k-1}x^{4k-1},$$

und wenn wir voraussetzen, dafs der absolute Werth von x die Einheit nicht übersteigt, so wird bei unendlich wachsenden k

$$Lim\, \frac{x^{4k+1}}{4k+1} = 0$$

mithin

2) $$arctan\, x = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots$$
$$-1 \leq x \leq +1.$$

Im Fall der absolute Werth von x mehr als die Einheit beträgt, läfst sich diese Formel nicht anwenden; man hat aber

$$arctan\, x = \tfrac{1}{2}\pi - arctan\, \frac{1}{x}$$

und da jetzt $\left[\frac{1}{x}\right] < 1$ ist, so kann der Subtrahend nach No. 2) entwickelt werden, wodurch man erhält

3) $$\operatorname{arctan} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1}\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \cdots.$$

$$-1 \leqq \frac{1}{x} \leqq +1.$$

Hiermit ist gleichzeitig die Aufgabe gelöst, Reihen für *arccot x* zu finden. Man hat nämlich allgemein

4) $$\operatorname{arccot} x = \operatorname{arctan}\frac{1}{x} = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctan} x$$

und hier setzt man für *arctan x* die Reihe 2) oder die Reihe 3), jenachdem der absolute Werth von x weniger oder mehr als die Einheit beträgt.

Die Gleichung 2) liefert Reihen zur Berechnung von π, wenn man dem x einen solchen gebrochenen Werth ertheilt, dafs *arctan x* einen aliquoten Theil der Kreisperipherie ausmacht. So erhält man z. B. für $x = 1$ die schon in §. 49 entwickelte Formel

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots;$$

ferner für $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, wobei *arctan* $x = \frac{1}{6}\pi$ wird,

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\,.\,3^1} + \frac{1}{5\,.\,3^2} - \frac{1}{7\,.\,3^3} + \cdots\right).$$

Am vortheilhaftesten geschieht die Berechnung von π auf folgende Weise. Für echt gebrochene α und β gilt die Formel

$$\operatorname{arctan}\alpha + \operatorname{arctan}\beta = \operatorname{arctan}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta};$$

wählt man hier α und β so, dafs

$$\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = 1, \quad \text{mithin} \quad \beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

ist, so wird die vorige Gleichung zur folgenden

5) $$\operatorname{arctan}\alpha + \operatorname{arctan}\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{\pi}{4},$$

und hier lassen sich die linker Hand vorkommenden Bögen nach Formel 2) entwickeln, nämlich

6) $$\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{1}\alpha - \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \tfrac{1}{5}\alpha^5 - \tfrac{1}{7}\alpha^7 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^5 - \cdots.$$

Hieraus ergiebt sich z. B. für $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \dots$$
$$+ \frac{1}{1}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \dots,$$

wonach die Rechnung sehr leicht ist*).

Capitel X.

Die Functionen complexer Variabelen.

§. 52.

Übergang zu den complexen Zahlen.

Vergleicht man die in §. 41 unter No 14) und 15) entwickelten Formeln

1) $$\frac{e^{\varkappa y} + e^{-\varkappa y}}{2}$$
$$= 1 + \frac{\varkappa^2 y^2}{1\,.\,2} + \frac{\varkappa^4 y^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{\varkappa^6 y^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \dots$$

2) $$\frac{e^{\varkappa y} - e^{-\varkappa y}}{2\varkappa}$$
$$= \frac{y}{1} + \frac{\varkappa^2 y^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{\varkappa^4 y^5}{1\,.\,2\,.\,4\,.\,5} + \frac{\varkappa^6 y^7}{1\,.\,2\dots 7} + \dots$$

mit den für *cos y* und *sin y* geltenden Formeln

3) $$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1\,.\,2} + \frac{y^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{y^6}{1\,.\,2\dots 6} + \dots,$$

4) $$\sin y = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{y^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \dots,$$

so findet man in so fern eine auffallende Übereinstimmung zwischen beiden, als in den Reihen 1) und 3), sowie in den Reihen 2) und 4) dieselben Potenzen von y und dieselben Nenner vorkommen. Es liegt daher nahe, die genannten Reihen zur völligen Coincidenz zu bringen, indem man die noch willkürliche Constante $\varkappa$ so wählt, dafs

$$\varkappa^2 = -1, \quad \varkappa^4 = +1, \quad \varkappa^6 = -1, \quad \varkappa^8 = +1, \dots$$

ist. Diese unendlich vielen Bedingungen, denen $\varkappa$ gleichzeitig genügen soll, reduciren sich auf eine, weil aus der ersten Gleichung

---

*) Die cyclometrischen Reihen sind fast gleichzeitig von Jac. Gregory, Leibnitz und Newton gefunden worden (Brief von Oldenburg an Leibnitz v. 12. April 1675, von Leibnitz an Oldenburg v. 27. Aug. 1676 und von Newton an Leibnitz v. 24. Oct. 1876); die Formel 6) rührt von Euler her (*Introd. in Anal. inf.* T. I).

$\varkappa^2 = -1$ alle übrigen folgen, wenn man jene auf die zweite, dritte u. s. w. Potenz erhebt. Man erhält nun

$$\varkappa = \sqrt{-1}$$

und da für diesen Werth die Reihen 1) und 3), sowie 2) und 4) zusammenfallen, so müssen auch die linken Seiten jener Gleichungen identisch werden; diefs giebt

$$5)\qquad \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2} = \cos y,$$

$$6)\qquad \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin y,$$

oder auch, wie man leicht findet

$$7)\qquad e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\,\sin y,$$

$$8)\qquad e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y - \sqrt{-1}\,\sin y,$$

In dem Auftreten der imaginären Zahl $\sqrt{-1}$ liegt hier nichts Überraschendes, ja es hätte sich sogar bei einiger Aufmerksamkeit voraussehen lassen, dafs der Versuch, den Cosinus und Sinus durch Exponentialgröfsen auszudrücken, auf etwas Unmögliches führen mufste. So lange nämlich $\varkappa$ eine positive reelle Zahl bedeutet, solange ist $e^{\varkappa y}$ eine Function, welche bei wachsenden y fortwährend zunimmt, während $e^{-\varkappa y}$ immer abnimmt, ohne negativ zu werden. Hieraus folgt, dafs die Function

$$9)\qquad \frac{e^{\varkappa y} + e^{-\varkappa y}}{2}$$

mit y gleichzeitig unendlich wächst und immer positiv bleibt. Diese Eigenschaften stimmen aber nicht zu denen des Cosinus, welcher im Gegentheil eine zwischen $+1$ und -1 hin und her oscillirende Function bildet. Ähnlich verhält sich die Sache mit dem Ausdrucke

$$10)\qquad \frac{e^{\varkappa y} - e^{-\varkappa y}}{2\varkappa},$$

welcher gleichzeitig mit y unendlich wächst, ohne negativ zu werden. Es darf daher nicht befremden, dafs kein reeller Werth von $\varkappa$ existirt, für welchen die in 9) und 10) verzeichneten Ausdrücke mit $\cos y$ und $\sin y$ zusammenfallen, sowenig wie man eine Curve von ungefähr parabolischer Gestalt mit einer wellenförmigen Linie zur Deckung bringen kann.

Trotzdem enthalten die Gleichungen 7) und 8) ein immerhin bemerkenswerthes Resultat; sie geben nämlich zu erkennen, dafs die Function e^z in zwei neue Functionen ($\cos y$ und $\sin y$) zerfällt, wenn

die Variabele z imaginär $= y\sqrt{-1}$ wird. Diefs ist gewissermaafsen ein vom Calcül selbst ertheilter Fingerzeig, bei der Betrachtung von Functionen sich nicht auf reelle Variabele einzuschränken. Um dieser Weisung in völliger Allgemeinheit nachzukommen, werden wir uns im Folgenden die Variabele einer Function als sogenannte complexe Zahl $x + y\sqrt{-1}$ denken, weil in dieser Form sowohl die reellen als die rein imaginären Zahlen enthalten sind, jene für $y = 0$, diese für $x = 0$. Sowie nun die Function einer reellen Variabelen meistens eine reelle (abhängige) Variabele ist, so läfst sich voraussehen, dafs die Function einer complexen Variabelen im Allgemeinen wieder eine complexe Zahl sein wird; demnach darf man erwarten, dafs eine Gleichung von der Form

$$f(x + y\sqrt{-1}) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1}$$

bestehen wird, und die Aufgabe ist, die beiden reellen Functionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zu bestimmen, in welche eine gegebene Function $f(z)$ zerfällt, sobald an die Stelle der reellen Variabelen z die complexe Variabele $x + y\sqrt{-1}$ gesetzt wird. Meistentheils bedarf es hierzu neuer Definitionen, denn die bisher gegebenen Erklärungen der Functionen

$$z^\mu, \quad a^z, \quad log\ z,$$

$$sin\ z, \quad cos\ z, \quad tan\ z, \quad cot\ z, \quad sec\ z, \quad csc\ z,$$

$$arcsin\ z, \quad arccos\ z, \quad arctan\ z, \quad arccot\ z, \quad arcsec\ z, \quad arccsc\ z$$

setzen stillschweigend ein reelles z voraus, und daher hat vorläufig z. B. $a^{y\sqrt{-1}}$ ebensowenig einen angebbaren Sinn als die trigonometrische Tangente des imaginären Bogens $y\sqrt{-1}$. Aus demselben Grunde ist die Ableitung der Formeln 7) und 8) keineswegs streng; sie sollte nur zur Einleitung in die Theorie der imaginären Zahlen dienen.

An das erwähnte Problem knüpft sich noch ein zweites. Die verschiedenen Functionen besitzen nämlich charakteristische Eigenschaften, die aus der Elementarmathematik hinreichend bekannt sind, z. B.

$$u^\mu \,.\, v^\mu = (uv)^\mu,$$

$$a^u \,.\, a^v = a^{u+v},$$

$$log\ u + log\ v = log\ (uv),$$

u. s. w.,

aber eben diese Gleichungen werden dort nur für reelle Werthe der Variabelen u und v bewiesen. Ob nun jene Gleichungen auch

bei complexen u und v richtig bleiben, das bedarf wieder einer neuen Untersuchung *).

§. 53.

Die algebraischen Functionen complexer Variabelen.

Zur Abkürzung bezeichnen wir künftig die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ mit i und nehmen die Wurzel im absoluten Sinne; es finden daher folgende Gleichungen statt

$$1)\quad \begin{cases} i^2 = -1, & i^4 = +1, & i^6 = -1, & i^8 = +1, \dots \\ i^3 = -i, & i^5 = +i, & i^7 = -i, & i^9 = +i, \dots \end{cases}$$

Zwei complexe Zahlen $x + iy$ und $\xi + i\eta$ nennen wir gleich, wenn ihre reellen, sowie ihre imaginären Theile gleich sind, nämlich $x = \xi$ und $y = \eta$. Eine Gleichung zwischen zwei complexen Zahlen ist demnach ein Complex von zwei Gleichungen zwischen reellen Zahlen.

Die Addition zweier complexen Zahlen definiren wir durch die Gleichung

$$2)\quad (x + iy) + (\xi + i\eta) = (x + \xi) + i(y + \eta)$$

d. h. unter der Summe der complexen Zahlen $x + iy$ und $\xi + i\eta$ verstehen wir die neue complexe Zahl $x + \xi + i(y + \eta)$, welche ebenso gebildet ist, als wenn i ein reeller Factor wäre.

Die Subtraction betrachten wir als das Umgekehrte der Addition; der Unterschied der beiden complexen Zahlen $X + iY$ und $x + iy$ ist hiernach diejenige noch unbekannte complexe Zahl $u + iv$, welcher die Eigenschaft

$$X + iY = (x + iy) + (u + iv)$$

zukommt. Nach No. 2) ist diese Gleichung einerlei mit

$$X + iY = (x + u) + i(y + v)$$

und hieraus folgt

$$X = x + u, \quad Y = y + v$$

mithin

$$u = X - x, \quad v = Y - y.$$

Vermöge dieser Werthe ist

$$3)\quad (X + iY) - (x + iy) = (X - x) + i(Y - y);$$

die Subtraction geschieht daher ebenso, als wenn i ein reeller Coefficient wäre.

---

*) Es gehört zu den Verdiensten Cauchy's, die obenerwähnten Probleme zuerst als nothwendige erkannt und im Wesentlichen gelöst zu haben (*Cours d'Anal. algèbr.*).

Die Multiplication erfordert wieder eine neue Definition, und zwar verstehen wir der Analogie wegen unter dem Producte von $x + iy$ und $\xi + i\eta$ denjenigen Ausdruck, der ebenso gebildet ist, als hätte man diese complexen Zahlen wie reelle Factoren multiplicirt und $i^2 = -1$ gesetzt; die Gleichung

4) $$(x + iy)\,(\xi + i\eta) = (x\xi - y\eta) + i(x\eta + y\xi)$$

enthält daher die Erklärung der Multiplication.

Die Division betrachten wir als die Umkehrung der Multiplication, d h. wir bestimmen die in der Gleichung

$$\frac{x + iy}{X + iY} = u + iv$$

vorkommenden Unbekannten u und v durch die Bedingung

$$x + iy = (X + iY)\,(u + iv) = (Xu - Yv) + i(Xv + Yu).$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$Xu - Yv = x, \quad Xv + Yu = y,$$

welche geben

$$u = \frac{Xx + Yy}{X^2 + Y^2}, \quad v = \frac{Xy - Yx}{X^2 + Y^2};$$

nach Substitution dieser Werthe haben wir

5) $$\frac{x + iy}{X + iY} = \frac{Xx + Yy}{X^2 + Y^2} + i\frac{Xy - Yx}{X^2 + Y^2}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch dadurch, dafs man Zähler und Nenner des linker Hand stehenden Bruches mit $X - iY$ multiplicirt und die Gleichung $(X + iY)\,(X - iY) = X^2 + Y^2$ beachtet; für die Praxis ist dieses Verfahren bequemer als das vorige.

Zu einer anderen Methode der Multiplication und Division führt folgende Bemerkung. Irgend zwei gegebene reelle Zahlen x und y kann man sich immer als rechtwinkelige Coordinaten eines Punktes der xy-Ebene construirt denken und dann ist es auch möglich, dieselben durch Polarcoordinaten auszudrücken; man setzt zu diesem Zwecke

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

und findet für r und θ die reellen Werthe

6) $$r^2 = x^2 + y^2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

7) $$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \pm k\pi,$$

worin k eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Demnach läfst sich jede complexe Zahl $x + iy$ unter der Form

8) $$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

darstellen; hierbei nennt man r den Modulus der complexen Zahl

$x + iy$ und nimmt ihn stets im absoluten Sinne; das Quadrat des Modulus heifst die Norm, θ die Amplitude.

Handelt es sich nun um die Multiplication zweier complexen Zahlen $x + iy$ und $x' + iy'$, so bringt man dieselben erst auf die Formen $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ und $r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ und hat dann

$$r(\cos\theta + \sin\theta) \,.\, r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
$$= rr'[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')]$$
$$= rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')];$$

der Modulus des Productes ist also das Product der gegebenen Moduli, und die Amplitude des Productes ist die Summe der früheren Amplituden.

Durch mehrmalige Anwendung dieser Regel gelangt man zu der allgemeinen Formel

$$9)\quad r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \,.\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \ldots . r_m(\cos\theta_m + i\sin\theta_m)$$
$$= r_1 r_2 \ldots r_m [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m)],$$

worin m eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet.

Auf ähnliche Weise kann die Division ausgeführt werden. Multiplicirt man nämlich Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')}$$

mit $\frac{1}{r'}(\cos\theta' - i\sin\theta')$, so erhält man im Nenner die Einheit, mithin ist der gesuchte Quotient

$$\frac{r}{r'}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' - i\sin\theta')$$
$$= \frac{r}{r'}[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta')]$$
$$= \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$$

oder zusammen

$$10)\qquad \frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')].$$

Diese Divisionsregel läfst sich ebenso leicht in Worte fassen wie die vorige Multiplicationsregel.

Die Potenz entspringt bekanntlich aus der Multiplication, in so fern man bei ganzen positiven m unter z^m den speciellen Werth versteht, welchen das Product $z_1 \,.\, z_2 \ldots z_m$ für $z_1 = z_2 = \ldots = z_m = z$ annimmt. Diese Definition benutzen wir auch bei complexen z und bezeichnen demgemäfs mit $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m$ dasjenige, was aus dem Producte in No. 9) hervorgeht, wenn alle r und θ gleich genommen werden; diefs giebt die Formel

11) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta),$$

welche unter dem Namen des Moivre'schen Satzes bekannt ist*).

Wie bei reellen z, so verstehen wir auch bei complexen z unter $z^{\frac{m}{n}}$ diejenige Zahl, deren n^{te} Potenz gleich z^m ist; setzen wir demgemäfs

12) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = \varrho(\cos\eta + i\sin\eta),$$

wo ϱ und η vorläufig unbekannt sind, so mufs die Gleichung gelten

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = [\varrho(\cos\eta + i\sin\eta)]^n.$$

Unter der Voraussetzung ganzer positiver m und n können wir diese Gleichung durch die folgende ersetzen

$$r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta) = \varrho^n(\cos n\eta + i\sin n\eta)$$

welche zerfällt in

$$\varrho^n \cos n\eta = r^m \cos m\theta, \quad \varrho^n \sin n\eta = r^m \sin m\theta.$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so erhält man

$$\varrho^{2n} = r^{2m} \quad \text{oder} \quad \varrho = r^{\frac{m}{n}},$$

wobei ϱ und r im absoluten Sinne zu nehmen sind. Nach Substitution des Werthes von ϱ gehen die vorigen Gleichungen über in

$$\cos n\eta = \cos m\theta, \quad \sin n\eta = \sin m\theta,$$

und diese können nur dann zusammen bestehen, wenn die Bögen $n\eta$ und $m\theta$ um ein Vielfaches der Kreisperipherie von einander differiren; demnach ist, unter k eine ganze positive oder negative Zahl verstanden,

$$n\eta - m\theta = 2k\pi, \quad \eta = \frac{m\theta + 2k\pi}{n}$$

und nach No. 12) vermöge der Werthe von ϱ und η

13) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right].$$

In Folge des Umstandes, dafs für k jede ganze Zahl zwischen $-\infty$ und $+\infty$ genommen werden darf, scheint die rechte Seite der Gleichung 13) unendlich viel verschiedene Werthe zu haben; bei genauerer Ansicht reducirt sich aber diese Zahl. Ertheilt man nämlich dem k ein Mal den individuellen positiven Werth h, das andere Mal den Werth $h + n$, so erhält der Bogen $\frac{m\theta + 2k\pi}{n}$ die beiden entsprechenden Werthe

$$\frac{m\theta + 2h\pi}{n} \quad \text{und} \quad \frac{m\theta + 2h\pi}{n} + 2\pi,$$

und diese Bögen haben gleiche goniometrische Functionen. Dasselbe

*) *Miscellanea analytica*, 1730, T. I.

gilt von den Fällen $k = h + 2n$, $h + 3n$ etc.; will man also Wiederholungen vermeiden, so braucht man bei positiven k nur $k = 0, 1, 2 \ldots (n - 1)$ zu nehmen. Ferner ändert sich die rechte Seite der Gleichung 13) nicht, wenn man einmal $k = -h$ und das andere Mal $k = n - h$ setzt; die negativen k liefern also keine neuen Resultate. Demnach hat die Potenz $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}}$ nur n von einander verschiedene Werthe, die aus der Gleichung 13) durch die Substitutionen $k = 0, 1, 2, \ldots (n - 1)$ hervorgehen.

Um noch den Fall zu betrachten, wo der Potenzexponent eine positive Irrationalzahl μ ist, nehmen wir erst k gleich einem Vielfachen von m, etwa $k = hm$ und lassen in der nunmehrigen Gleichung

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m(\theta + 2h\pi)}{n} + i\sin\frac{m(\theta + 2h\pi)}{n}\right]$$

m und n gleichzeitig ins Unendliche wachsen, jedoch so, daſs $Lim\,\frac{m}{n} = \mu$ ist. Wir erhalten

$$14)\quad [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\mu} = r^{\mu}[\cos\mu(\theta + 2h\pi) + i\sin\mu(\theta + 2h\pi)];$$

die Zahl h bleibt hier willkürlich, und die rechte Seite hat unendlich viel verschiedene Werthe.

Ist endlich der Potenzexponent eine negative Zahl $-p$, so verstehen wir, bei complexen wie bei reellen z, unter z^{-p} den reciproken Werth von z^p. Hiernach ist z. B. bei ganzen positiven m

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-m} = \frac{1}{[r(\cos\theta + i\sin\theta]^m} = \frac{1}{r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)}$$
$$= r^{-m}(\cos m\theta - i\sin m\theta);$$

ähnlich verhält sich die Sache in jedem anderen Falle.

Es läſst sich nunmehr auch die Frage entscheiden, ob die in der Gleichung

$$z^{\mu}\,.\,z'^{\mu} = (zz')^{\mu}$$

ausgesprochene Haupteigenschaft der Potenz ihre Gültigkeit bei complexen z behält. So ist z. B. im Falle $\mu = \frac{m}{n}$, wenn

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

gesetzt und auf gewöhnliche Weise multiplicirt wird,

$$z^{\frac{m}{n}}\,.\,z'^{\frac{m}{n}}$$
$$= r^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right]\cdot r'^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m\theta' + 2k'\pi}{n} + i\sin\frac{m\theta' + 2k'\pi}{n}\right]$$
$$= (rr')^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m(\theta + \theta') + 2(k + k')\pi}{n} + i\sin\frac{m(\theta + \theta') + 2(k + k')\pi}{n}\right];$$

schreibt man h für $k+k'$ und beachtet, dafs jetzt h eine ebenso beliebige ganze Zahl ist wie k in No. 13), so hat man

$$z^{\frac{m}{n}} \cdot z'^{\frac{m}{n}} = (rr')^{\frac{m}{n}} \left[\cos \frac{m(\theta+\theta')+2h\pi}{n} + i \sin \frac{m(\theta+\theta')+2h\pi}{n} \right]$$

$$= \left\{ rr' \left[\cos(\theta+\theta') + i \sin(\theta+\theta') \right] \right\}^{\frac{m}{n}}$$

$$= (zz')^{\frac{m}{n}}.$$

Wie man sieht, bleibt der erwähnte Satz ungestört, nur mufs man ihn genauer so aussprechen: irgend einer der Werthe von $z^{\frac{m}{n}}$, multiplicirt mit irgend einem der Werthe von $z'^{\frac{m}{n}}$, giebt einen Werth von $(zz')^{\frac{m}{n}}$. Man wird leicht bemerken, dafs der Satz in dieser Fassung auch bei jedem anderen Exponenten gilt.

§. 54.

Anwendungen der vorigen Sätze.

I. Unter der Voraussetzung eines ganzen positiven m ist nach dem Moivre'schen Theorem

$$\cos m\theta + i \sin m\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^m,$$

wobei die rechte Seite ein Product aus m gleichen Factoren darstellt. Da die Multiplication bei complexen Factoren auf ganz dieselbe Weise geschieht wie bei reellen Factoren, so kann die Entwickelung jenes Productes mittelst des binomischen Satzes geschehen und giebt

$$\cos m\theta + i \sin m\theta$$

$$= (m)_0 \cos^m\theta + (m)_1\, i \cos^{m-1}\theta \sin\theta + (m)_2\, i^2 \cos^{m-2}\theta \sin^2\theta + \dots.$$

Nach Substitution der Werthe von i^2, i^3, i^4 etc. zerfällt die rechte Seite in einen reellen und in einen imaginären Theil, mithin ist durch Vergleichung

$$\cos m\theta = (m)_0 \cos^m\theta - (m)_2 \cos^{m-2}\sin^2\theta + (m)_4 \cos^{m-4}\sin^4\theta - \dots,$$

$$\sin m\theta = (m)_1 \cos^{m-1}\theta \sin\theta - (m)_3 \cos^{m-3}\theta \sin^3\theta + (m)_5 \cos^{m-5}\sin^5\theta - \dots.$$

Diese Formeln stimmen mit denen überein, welche in §. 44 auf anderem Wege entwickelt wurden.

II. Die Auflösung der Gleichung $x^n = +1$. Die vorstehende Gleichung giebt

$$x = (+1)^{\frac{1}{n}},$$

d. i. nach Formel 13) des vorigen Paragraphen, wenn $r = 1$, $\theta = 0$ und $m = 1$ gesetzt wird,

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1).$$

Bei geraden n lassen sich die Werthe von k folgendermaafsen ordnen:

$$k = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots\ldots (\tfrac{1}{2}n - 1),$$
$$\tfrac{1}{2}n, \quad n-1, \quad n-2, \quad \ldots\ldots (\tfrac{1}{2}n + 1),$$

dagegen bei ungeraden n:

$$k = \quad 0 \quad, \quad 1 \quad, \quad 2 \quad, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1),$$
$$n-1, \quad n-2, \quad n-3, \ldots \tfrac{1}{2}(n+1).$$

Hiernach sind für gerade n die Werthe von x:

1)
$$+1 \quad , \quad -1$$
$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \quad , \quad \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n},$$
$$\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} \quad , \quad \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n},$$
$$\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n} \quad , \quad \cos\frac{6\pi}{n} - i\sin\frac{6\pi}{n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{n};$$

bei ungeraden n dagegen hat x folgende Werthe:

2)
$$+1,$$
$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \quad \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n},$$
$$\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, \quad \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n},$$
$$\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}, \quad \cos\frac{6\pi}{n} - i\sin\frac{6\pi}{n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

In allen Fällen, wo sich die Theilung der Kreisperipherie in $2n$ gleiche Theile geometrisch ausführen läfst, kann man die Werthe der vorkommenden Cosinus und Sinus algebraisch darstellen. So ist z. B. für $n = 5$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

und wenn man hieraus $\cos\frac{2}{5}\pi$, $\cos\frac{4}{5}\pi$, $\sin\frac{2}{5}\pi$, $\sin\frac{4}{5}\pi$ berechnet, so findet man, dafs die Gleichung

$$x^5 = 1$$

folgende Wurzeln hat:

$$x_1 = +1,$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \qquad x_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_4 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad x_5 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

III. Die Auflösung der Gleichung $x^n = -1$. Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man zunächst

$$x = (-1)^{\frac{1}{n}}$$

und nachher aus Formel 13) des vorigen Paragraphen für $r = 1$, $\theta = \pi$, $m = 1$,

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots (n-1),$$

Demzufolge hat x bei geraden n die Werthe:

3)
$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n},$$
$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n} - i\sin\frac{3\pi}{n},$$
$$\cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n} - i\sin\frac{5\pi}{n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-1)\pi}{n};$$

dagegen gelten bei ungeraden n folgende Werthe von x:

4)
$$-1,$$
$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n},$$
$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n} - i\sin\frac{3\pi}{n},$$
$$\cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n} - i\sin\frac{5\pi}{n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

IV. Das Theorem von Cotes*). Nach einem bekannten Satze, dessen Beweis man auch im Anhange findet, läfst sich jede ganze rationale algebraische Function

5) $$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n$$

in Factoren ersten Grades zerlegen, sobald es gelingt, die n Wurzeln

---

*) *Harmonia mensur.* 1722. p. 114.

der Gleichung $f(x)=0$ zu finden; heifsen letztere $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, so ist nämlich

6) $$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n).$$

Diesen Satz wenden wir zuerst auf die Function $f(x)=x^n-1$ an und haben dann statt $x_1, x_2, \dots x_n$ die unter No. 1) oder No. 2) verzeichneten Werthe zu setzen, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Dabei lassen sich je zwei conjugirte complexe Factoren zusammenziehen und liefern ein reelles Product, weil

$$\{x-(\cos\theta+i\sin\theta)\}\{x-(\cos\theta-i\sin\theta)\}$$
$$=(x-\cos\theta)^2-(i\sin\theta)^2=x^2-2x\cos\theta+1.$$

Hiernach ist für gerade n:

$$x^n-1$$
$$=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\dots$$
$$\dots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1\right),$$

dagegen für ungerade n:

$$x^n-1$$
$$=(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\dots$$
$$\dots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right).$$

Setzt man $x=\frac{a}{b}$ und multiplicirt mit b^n, so wird für gerade n:

7) $$a^n-b^n$$
$$=(a^2-b^2)\left(a^2-2ab\cos\frac{2\pi}{n}+b^2\right)\left(a^2-2ab\cos\frac{4\pi}{n}+b^2\right)\dots$$
$$\dots\left(a^2-2ab\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+b^2\right),$$

und bei ungeraden n:

8) $$a^n-b^n$$
$$=(a-b)\left(a^2-2ab\cos\frac{2\pi}{n}+b^2\right)\left(a^2-2ab\cos\frac{4\pi}{n}+b^2\right)\dots$$
$$\dots\left(a^2-2ab\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+b^2\right).$$

Zwei ähnliche Formeln entstehen, wenn man die Gleichung 6) auf den Fall $f(x)=x^n+1$ anwendet und für $x_1, x_2, \dots x_n$ die in No. 3) oder No. 4) verzeichneten Werthe setzt. Für $x=\frac{a}{b}$ erhält man schliefslich bei geraden n:

9) $$a^n + b^n$$
$$= \left(a^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{n} + b^2\right)\left(a^2 - 2ab\cos\frac{3\pi}{n} + b^2\right)\ldots\ldots\left(a^2 - 2ab\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + b^2\right),$$

und bei ungeraden n:

10) $$a^n + b^n$$
$$= (a+b)\left(a^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{n} + b^2\right)\left(a^2 - 2ab\cos\frac{3\pi}{n} + b^2\right)\ldots\ldots\left(a^2 - 2ab\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + b^2\right).$$

Nicht ohne Interesse ist die geometrische Bedeutung dieser vier Gleichungen. Ein mit dem Halbmesser $CB = b$ aus dem Mittelpunkte C beschriebener Kreis sei nämlich in $2n$ gleiche Theile getheilt und es mögen B_0, B_1, B_2, ... B_{2n-1} die $2n$ Theilpunkte der Peripherie heifsen; verbindet man diese mit einem auf dem Radius CB_0 oder dessen Verlängerung befindlichen Punkte A, für welchen $CA = a$ ist, so hat man folgenden Satz: das Product aller Strahlen gerader Nummer AB_0, AB_2, AB_4, ... AB_{2n-2} ist gleich $\overline{AC}^n - \overline{BC}^n$ oder $= \overline{BC}^n - \overline{AC}^n$, jenachdem der Punkt A aufserhalb oder innerhalb des Kreises liegt, und das Product aller Strahlen ungerader Nummer $AB_1, AB_3, \ldots AB_{2n-1}$ ist immer gleich $\overline{AC}^n + \overline{BC}^n$.

V. Eine andere Form gewinnen die Gleichungen 7) bis 10) wenn man
$$a^2 + b^2 = \alpha, \quad 2ab = \beta$$
setzt, woraus folgt
$$a + b = \sqrt{\alpha + \beta}, \quad a - b = \sqrt{\alpha - \beta},$$
$$a = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}};$$
bei umgekehrter Anordnung der Factoren erhält man nämlich aus 7) und 9) für gerade n:

11) $$\left(\alpha + \beta\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(\alpha + \beta\cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(\alpha + \beta\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\left\{\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}n} - \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}n}\right\},$$

12) $$\left(\alpha + \beta\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\alpha + \beta\cos\frac{3\pi}{n}\right)\ldots\left(\alpha + \beta\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$
$$= \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}n} + \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}n},$$

und analog aus 10) und 8) für ungerade n:

$$13)\quad \left(\alpha+\beta\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(\alpha+\beta\cos\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\left(\alpha+\beta\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}}\left\{\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}n}+\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}n}\right\},$$

$$14)\quad \left(\alpha+\beta\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\alpha+\beta\cos\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\left(\alpha+\beta\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}}\left\{\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}n}-\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}n}\right\}.$$

Diese Formeln gestatten folgende geometrische Anwendungen.

a. Denkt man sich aus den Halbachsen a und $b < a$ eine Ellipse construirt, einen Brennpunkt derselben zum Anfangspunkte eines Polarcoordinatensystemes genommen und die positive Seite der Polarachse nach dem nächsten Hauptscheitel hin gelegt, so besteht zwischen dem Polarwinkel ϑ (der sogenannten wahren Anomalie) und dem zugehörigen Brennstrahl r die bekannte Polargleichung

$$r=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\vartheta}\quad\text{oder}\quad a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\vartheta=\frac{b^2}{r}.$$

Den Werthen $\vartheta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}$ u. s. w. mögen die Vectoren r_0, r_1, r_2, r_3 u. s. w. entsprechen, die zusammen einen Büschel bilden, worin jeder Strahl mit dem folgenden den Winkel $\frac{\pi}{n}$ einschliefst; für

$$\alpha=a,\quad \beta=\sqrt{a^2-b^2}$$

ergiebt sich nach diesen Bemerkungen aus No. 11)

$$\frac{b^2}{r_2}\cdot\frac{b^2}{r_4}\cdot\frac{b^2}{r_6}\cdots\frac{b^2}{r_{n-2}}=\frac{1}{b}\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{1}{2}n}-\left(\frac{a-b}{2}\right)^{\frac{1}{2}n}\right\}.$$

Umgekehrt ist also für gerade n:

$$15)\qquad r_2r_4r_6\cdots r_{n-2}=\frac{2^{\frac{1}{2}n}\,b^{n-1}}{(a+b)^{\frac{1}{2}n}-(a-b)^{\frac{1}{2}n}}$$

und nach Formel 12)

$$16)\qquad r_1r_3r_5\cdots r_{n-1}=\frac{2^{\frac{1}{2}n}\,b^{n}}{(a+b)^{\frac{1}{2}n}+(a-b)^{\frac{1}{2}n}};$$

auf analoge Weise wird aus No. 13) und 14) für ungerade n:

$$17)\qquad r_2r_4r_6\cdots r_{n-1}=\frac{2^{\frac{1}{2}(n-1)}\,b^{n-1}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)}{(a+b)^{\frac{1}{2}n}+(a-b)^{\frac{1}{2}n}},$$

$$18)\qquad r_1r_3r_5\cdots r_{n-2}=\frac{2^{\frac{1}{2}(n-1)}\,b^{n-1}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)}{(a+b)^{\frac{1}{2}n}-(a-b)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 15) und 16) ebenso 17) und 18) und setzt noch die Factoren $r_0 r_n = b^2$ hinzu, so gelangt man zu der Formel

19) $$r_0 r_1 r_2 r_3 \dots r_n = \frac{2^n b^{2n+1}}{(a+b)^n - (a-b)^n},$$

welche für jedes ganze positive n gilt und sich auch aus No. 11) ergiebt, wenn man $2n$ an die Stelle von n treten läfst.

b. Behufs einer zweiten Anwendung der Formel 11) nehmen wir den Mittelpunkt der vorigen Ellipse zum Anfange und die kleine Halbachse b zur Achse eines Polarsystemes R, Θ; die Polargleichung der Ellipse ist dann

$$\left(\frac{R \sin \Theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{R \cos \Theta}{b}\right)^2 = 1$$

oder nach einer leichten Umformung

20) $$\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2} \cos 2\Theta = \left(\frac{ab}{R}\right)^2$$

Der rechte Winkel zwischen a und b sei nun in n gleiche Theile getheilt, und es mögen den Polarwinkeln

$$\Theta = \frac{\frac{1}{2}\pi}{n}, \quad 2\frac{\frac{1}{2}\pi}{n}, \quad 3\frac{\frac{1}{2}\pi}{n}, \dots$$

die Vectoren R_1, R_2, R_3 u. s. w. entsprechen; es ist dann

$$\left(\frac{ab}{R_1}\right)^2 \left(\frac{ab}{R_2}\right)^2 \left(\frac{ab}{R_3}\right)^2 \dots \left(\frac{ab}{R_{n-1}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2} \cos \frac{\pi}{n}\right) \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2} \cos \frac{2\pi}{n}\right) \dots$$

$$\dots \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2} \cos \frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Aus No. 11) ergiebt sich für $\alpha = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, $\beta = \frac{1}{2}(a^2-b^2)$ und wenn $2n$ für n gesetzt wird, der Werth des rechts vorkommenden Productes und damit auch der Betrag von R_1, $R_2 \dots R_{n-1}$; durch Hinzufügung der Factoren $R_0 = b$, $R_n = a$ folgt noch

21) $$R_0 R_1 R_2 \dots R_n = (2ab)^n \sqrt{\left\{\frac{ab}{(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}}\right\}}.$$

c. Die sogenannte Fufspunktcurve der Ellipse wird bekanntlich in rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten durch die Gleichung

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = a^2\xi^2 + b^2\eta^2$$

dargestellt, welche für $\xi = \varrho \cos \Theta$, $\eta = \varrho \sin \Theta$ in die Polargleichung

$$\varrho^2 = a^2 \cos^2 \Theta + b^2 \sin^2 \Theta = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2} \cos 2\Theta$$

übergeht. Aus dem Vergleiche mit No. 20) ersieht man augenblicklich das Bestehen der Relation

$$R = \frac{ab}{\varrho},$$

welche sich zur Umwandlung von No. 21) benutzen läfst. Sind nämlich $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ die Radienvectoren, welche den Polarwinkeln

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{n}, \quad 2\frac{\frac{1}{2}\pi}{n}, \quad 3\frac{\frac{1}{2}\pi}{n}, \ldots.$$

entsprechen, so ergiebt sich aus No. 21) die Formel

$$22) \qquad \varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n = \frac{1}{2^n} \sqrt{ab\left[(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}\right]}$$

Mittelst der Gleichungen 11) bis 14) kann man überhaupt analoge Productenformeln für die Radienvectoren aller Curven entwickeln, deren Polargleichungen unter einer der Formen

$$r^\mu = \alpha + \beta \cos \Theta \quad \text{oder} \quad r^\mu = \alpha + \beta \cos 2\Theta$$

enthalten sind*).

§. 55.

Die Exponentialgröfsen mit complexen Variabelen.

Bei reellen z und unendlich wachsenden m gilt bekanntlich die Formel

$$e^z = Lim \left\{\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m\right\},$$

welche den Satz enthält, dafs die natürliche Exponentialgröfse als Grenzwerth einer gewissen Potenz angesehen werden kann; diese Formel eignet sich besonders gut zur Definition der Exponentialgröfse, weil nach den Untersuchungen des §. 53 die Bedeutung der Potenz unter allen Umständen feststeht. Wir definiren daher e^{x+iy} durch die Gleichung

$$1) \qquad e^{x+iy} = Lim \left\{\left(1 + \frac{x+iy}{m}\right)^m\right\}$$

und setzen m als ganze positive Zahl voraus, um jede Mehrdeutigkeit der Potenz zu vermeiden**).

---

*) Die in V abgeleiteten Resultate hat der Verf. zuerst mitgetheilt in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Thl. XXVI.

**) Cauchy definirt in seinem *Cours d'Anal. algèbr.* die Exonentialgröfse e^{x+iy} als Summe der Reihe

$$1 + \frac{x+iy}{1} + \frac{(x+iy)^2}{1.2} + \ldots,$$

wodurch einerseits die Theorie jener Function und ihrer Verwandten in eine keineswegs nöthige Abhängigkeit von der Reihenlehre geräth, und andererseits die Sonderung der

Der in No. 1) postulirte Grenzübergang läſst sich in folgender Weise ausführen. Wir bringen vorerst die Basis der Potenz auf die Normalform complexer Zahlen, indem wir

2) $$1+\frac{x+iy}{m}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

setzen, woraus folgt

3) $$r=\left[1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right]^{\frac{1}{2}},\quad \tan\theta=\frac{\frac{y}{m}}{1+\frac{x}{m}}.$$

Bezeichnen wir mit ϑ den spitzen Bogen, welcher dieselbe Tangente wie θ besitzt, so haben wir die beiden Gleichungen

4) $$\vartheta=\arctan\frac{\frac{y}{m}}{1+\frac{x}{m}},\quad \theta=\vartheta+k\pi,$$

wo k jede positive oder negative ganze Zahl bedeuten kann. Die Gleichung 2) wird jetzt zur folgenden

$$1+\frac{x+iy}{m}=r[\cos(\vartheta+k\pi)+i\sin(\vartheta+k\pi)];$$

im speciellen Falle $x=0$, $y=0$ ist $r=1$, $\vartheta=0$, mithin

$$1=\cos k\pi+i\sin k\pi=\cos k\pi$$

und daraus erhellt, daſs k eine gerade Zahl sein muſs. Man hat deſshalb einfacher

$$1+\frac{x+iy}{m}=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$$

und nach dem Moivre'schen Satze

$$\left(1+\frac{x+iy}{m}\right)^m=r^m(\cos m\vartheta+i\sin m\vartheta)$$

mithin nach No. 1)

5) $$e^{x+iy}=Lim\,[r^m(\cos m\vartheta+i\sin m\vartheta)].$$

Nunmehr kommt es darauf an, die Grenzwerthe zu bestimmen, gegen welche r^m und $m\vartheta$ bei unendlich wachsenden m convergiren.

Nach No. 3) ist

$$r^m=\left(1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m}$$

und wenn zur Abkürzung

---

reellen und imaginären Bestandtheile erschwert wird. Die obige Definition ist vom Verf. gegeben und von den Kennern der Theorie complexer Zahlen adoptirt worden. (Vergl. Roch in der Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. Jahrg. VIII, S. 15.)

$$\frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2} = \frac{1}{\omega}$$

gesetzt wird, so hat man auch

$$r^m = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}m} = \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]^{\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\omega}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]^{x + \frac{x^2 + y^2}{2m}}.$$

Wie die vorhergehende Gleichung zeigt, wächst ω gleichzeitig mit m ins Unendliche, daher ist

6) $$Lim\,(r^m) = e^x.$$

Was ferner $m\vartheta$ betrifft, so folgt aus No. 4) die identische Gleichung

$$m\vartheta = \frac{\vartheta}{tan\,\vartheta} \cdot m\,tan\,\vartheta = \frac{cos\,\vartheta}{\frac{sin\,\vartheta}{\vartheta}} \cdot \frac{y}{1 + \frac{x}{m}},$$

und wenn man berücksichtigt, dafs (nach No. 4) ϑ gegen die Null convergirt, falls m unendlich wächst, so erhält man

7) $$Lim\,(m\vartheta) = y.$$

Die Gleichungen 5), 6) und 7) liefern nun zusammen

8) $$e^{x+iy} = e^x\,(cos\,y + i\,sin\,y)$$

und diefs ist die vollständig ausgearbeitete Definition der Exponentialgröfse mit complexen Exponenten.

Ganz analog kann die allgemeinere Exponentialgröfse a^z behandelt werden. Für reelle z hat man nämlich

$$a^z = e^{z\,la} = Lim\left\{\left(1 + \frac{z\,la}{m}\right)^m\right\}$$

und wenn man diese Gleichung im Falle $z = x + iy$ als Definition von a^{x+iy} benutzt, so erhält man leicht

9) $$a^{x+iy} = a^x\,[cos\,(y\,la) + i\,sin\,(y\,la)].$$

Mittelt dieser Gleichung läfst sich auch entscheiden, ob die Fundamentaleigenschaft der Exponentialgröfse, nämlich die Formel

$$a^z \cdot a^{z'} = a^{z+z'},$$

bei complexen z und z' richtig bleibt oder nicht. Multiplicirt man nämlich die Gleichung 9) mit der analogen Gleichung

$$a^{x'+iy'} = a^{x'}\,[cos\,(y'\,la) + i\,sin\,(y'\,la)]$$

und benutzt rechter Hand die Formel

$$\varrho\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) \cdot \varrho'\,(cos\,\theta' + i\,sin\,\theta') = \varrho\varrho'\,[cos\,(\theta + \theta') + i\,sin\,(\theta + \theta')],$$

so findet man

$$a^{x+iy} \cdot a^{x'+iy'} = a^{x+x'}\left\{cos\,[(y + y')\,la] + i\,sin\,[(y + y')\,la]\right\}$$
$$= a^{(x+x') + i(y+y')},$$

woraus zu ersehen ist, dafs die erwähnte Eigenschaft der Exponentialgröfse auch bei complexen Exponenten gilt.

Um eine Anwendung der Formel 8) zu geben, setzen wir $x = 0$ einmal $y = u$, nachher $y = -u$ und haben

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u, \quad e^{-iu} = \cos u - i \sin u$$

mithin durch Addition und Subtraction

10) $$2 \cos u = e^{iu} + e^{-iu}, \quad 2 i \sin u = e^{iu} - e^{-iu}.$$

Beide Seiten dieser Gleichungen erheben wir auf die m^{te} Potenz und benutzen rechter Hand den binomischen Satz unter der Voraussetzung eines ganzen positiven m; diefs giebt

11) $$2^m \cos^m u$$
$$= (m)_0 \, e^{imu} + (m)_1 \, e^{i(m-2)u} + (m)_2 \, e^{i(m-4)u} + \ldots,$$

12) $$i^m \, 2^m \sin^m u$$
$$= (m)_0 \, e^{imu} - (m)_1 \, e^{i(m-2)u} + (m)_2 \, e^{i(m-4)u} - \ldots.$$

Die hier vorkommenden Exponentialgröfsen lassen sich wieder in Cosinus und Sinus umsetzen, nämlich

$$e^{imu} = \cos mu + i \sin mu,$$
$$e^{i(m-2)u} = \cos (m-2) u + i \sin (m-2) u,$$

u. s. w.

und nachher können beiderseits sowohl die reellen als die imaginären Theile verglichen werden. Aus No. 11) erhält man auf diesem Wege

$$2^m \cos^m u$$
$$= (m)_0 \cos mu + (m)_1 \cos (m-2) u + (m)_2 \cos (m-4) u + \ldots,$$

wobei es nicht überflüssig ist, gerade und ungerade m zu unterscheiden. Bei geraden m giebt es einen mittelsten Binomialcoefficienten, welcher nur einmal vorkommt; jeder andere Binomialcoefficient tritt zweimal auf und daher können diejenigen zwei Summanden vereinigt werden, welche einen solchen Coefficienten zum gemeinschaftlichen Factor haben. Diefs giebt nach beiderseitiger Division mit 2

13) $$2^{m-1} \cos^m u$$
$$= (m)_0 \cos mu + (m)_1 \cos (m-2) u + (m)_2 \cos (m-4) u + \ldots$$
$$\ldots + (m)_{\frac{1}{2}m-1} \cos 2u + \tfrac{1}{2} (m)_{\frac{1}{2}m}.$$

Dagegen findet man bei ungeraden m:

14) $$2^{m-1} \cos^m u$$
$$= (m)_0 \cos mu + (m)_1 \cos (m-2) u + (m)_2 \cos (m-4) u + \ldots$$
$$\ldots + (m)_{\frac{1}{2}(m-3)} \cos 3u + (m)_{\frac{1}{2}(m-1)} \cos u.$$

Ganz ähnlich läfst sich die Gleichung 12) umgestalten; man erhält bei geraden m:

15) $$(-1)^{\frac{1}{2}m} 2^{m-1} \sin^m u$$
$$= (m)_0 \cos mu - (m)_0 \cos (m-2) u + (m)_4 \cos (m-4) u - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1} (m)_{\frac{1}{2}m-1} \cos 2u + (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2} (m)_{\frac{1}{2}m},$$

dagegen für ungerade m:

16) $$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\, 2^{m-1} \sin^m u$$
$$= (m)_0 \sin mu - (m)_1 \sin(m-2)u + (m)_2 \sin(m-4)u - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(m-3)} (m)_{\frac{1}{2}(m-3)} \sin 3u + (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} (m)_{\frac{1}{2}(m-1)} \sin u.$$

Die letzten vier Gleichungen können als die Umkehrungen der Formeln 10), 11), 13) und 14) in §. 44 angesehen werden.

§. 56.

Die Logarithmen complexer Zahlen.

Einem reellen und positiven ζ entspricht bekanntlich nur ein reelles z, welches die Eigenschaft $e^z = \zeta$ besitzt, und dieses z ist der mit $z = l\zeta$ bezeichnete eindeutige natürliche Logarithmus von ζ. Da es aufser diesem reellen z möglicherweise noch complexe z geben kann, die ebenfalls der Gleichung $e^z = \zeta$ genügen, so mag im Folgenden jedes complexe z, welchem die erwähnte Eigenschaft zukommt, mit $z = L\zeta$ bezeichnet werden und der allgemeine natürliche Logarithmus von ζ heifsen. Dieselbe Definition behalten wir bei complexen ζ wörtlich bei und setzen demnach

1) $$L(\xi + i\eta) = x + iy$$

sobald die Gleichung

$$e^{x+iy} = \xi + i\eta$$

stattfindet. Letztere ist identisch mit

$$e^x(\cos y + i \sin y) = \xi + i\eta$$

und liefert die beiden Gleichungen

2) $$e^x \cos y = \xi, \quad e^x \sin y = \eta,$$

welche zur Bestimmung von x und y dienen.

Zunächst erhält man

$$e^{2x} = \xi^2 + \eta^2, \quad e^x = \sqrt{\xi^2 + \eta^2};$$

das Wurzelzeichen darf hier nur im absoluten Sinne genommen werden, weil x als reell vorausgesetzt wurde und daher e^x immer positiv bleibt. Nach der anfangs gemachten, reelle z und ζ betreffenden Bemerkung folgt nun für x der eindeutige Werth

3) $$x = \tfrac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2).$$

Nach Substitution des Betrages von e^x erhält man aus den Gleichungen 2)

4) $$\cos y = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \sin y = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

5) $$\tan y = \frac{\eta}{\xi}, \quad y = \arctan\frac{\eta}{\xi} + m\pi,$$

wo m irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Um sie näher zu bestimmen, gehen wir auf den speciellen Fall $\eta = 0$ zurück; es ist dann

$$y = \pm m\pi, \quad \cos y = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}},$$

mithin, weil die Wurzel im absoluten Sinne genommen werden mufs

$$\cos y = +1 \quad \text{d. h.} \quad \cos m\pi = +1 \quad \text{für positive } \xi,$$
$$\cos y = -1 \quad \text{d. h.} \quad \cos m\pi = -1 \quad \text{für negative } \xi.$$

Daraus geht hervor, dafs im ersten Falle m eine gerade Zahl, im zweiten m eine ungerade Zahl sein mufs. Bezeichnet k irgend eine positive oder negative ganze Zahl, so gelten vermöge der Gleichungen 1), 3) und 5) folgende Formeln:

6) $$L(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i\left[\arctan\frac{\eta}{\xi} + 2k\pi\right], \qquad \xi > 0,$$

7) $$L(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i\left[\arctan\frac{\eta}{\xi} + (2k+1)\pi\right], \qquad \xi < 0.$$

Wie man sieht, besitzt der allgemeine Logarithmus einer complexen Zahl unendlich viel verschiedene Werthe. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch, wenn man nach Analogie der Formel

$$l\xi = Lim \left\{n(\xi^{\frac{1}{n}} - 1)\right\}, \quad \text{für } n = \infty,$$

den allgemeinen Logarithmus von $\xi + i\eta$ mittelst der Gleichung

$$L(\xi + i\eta) = Lim \left\{n[(\xi + i\eta)^{\frac{1}{n}} - 1]\right\}$$

definirt, die n verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{\xi + i\eta}$ aus der Formel 13) in §. 53 bestimmt und nachher n unendlich wachsen läfst*).

Die Gleichung 6) liefert für $\xi = +1$, $\eta = 0$

8) $$L(+1) = i \cdot 2k\pi;$$

von den unendlich vielen Werthen des $L(+1)$ ist einer reell nämlich der für $k = 0$ entstehende Werth, welcher mit $l(+1) = 0$ übereinstimmt.

Für $\xi = -1$, $\eta = 0$ giebt die Formel 7)

9) $$L(-1) = i \cdot (2k+1)\pi,$$

die Werthe von $L(-1)$ sind demnach sammt und sonders imaginär.

Vermöge der Gleichungen 8) und 9) lassen sich die Formeln 6) und 7) auch in folgender Gestalt darstellen

---

*) Die Vieldeutigkeit der Logarithmen hat Euler zuerst bemerkt, indem er die von d'Alembert angeregte Streitfrage nach den Logarithmen negativer Zahlen discutirte. (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, *année* 1749.)

10) $L(\xi + i\eta) = \frac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i \cdot arctan \frac{\eta}{\xi} + L(+1), \quad \xi > 0,$

11) $L(\xi + i\eta) = \frac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i \cdot arctan \frac{\eta}{\xi} + L(-1), \quad \xi < 0,$

Für $\xi = 0$, $\eta = 1$ erhält man sowohl aus No. 6) als aus No. 7)

12) $$L(i) = i\frac{m\pi}{2},$$

wo m irgend eine positive oder negative ungerade Zahl bedeutet.

Im vorigen Paragraphen wurde bewiesen, dafs die Gleichung

13) $$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$$

bei complexen z und z' ebenso wie für reelle z und z' gilt. Setzt man nun bei complexen z und z'

$$e^z = \zeta, \quad e^{z'} = \zeta'$$

mithin

$$z = L\zeta, \quad z' = L\zeta'$$

so erhält man aus No. 13)

$$\zeta \cdot \zeta' = e^{z+z'}, \quad z + z' = L(\zeta\zeta')$$

d. h.

14) $$L\zeta + L\zeta' = L(\zeta\zeta').$$

Die Fundamentaleigenschaft des eindeutigen reellen Logarithmus gilt demnach auch für den allgemeinen Logarithmus, nur mufs man, wegen der Vieldeutigkeit des letzteren, präciser sagen: irgend ein Werth von $L\zeta$, vermehrt um irgend einen der Werthe von $L\zeta'$, giebt einen der Werthe von $L(\zeta\zeta')$.

Als Anwendung dieses Satzes kann man $L(\xi + i\eta)$ und $L(\xi - i\eta)$ entweder nach No. 6) oder nach No. 7) entwickeln und die Differenz beider Gleichungen nehmen; in beiden Fällen ergiebt sich

15) $$L\left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right) = 2i\left[arctan \frac{\eta}{\xi} + h\pi\right],$$

wobei h eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

§. 57.

Die goniometrischen Functionen complexer Bögen.

In §. 55, No. 10) erhielten wir zwei Gleichungen, die sich folgendermaafsen darstellen lassen

$$cos\, u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}, \quad sin\, u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i};$$

für alle reellen u gelten diese Formeln schlechthin, wir wollen sie aber auch für complexe u beibehalten und sie in diesem Falle als

Definitionen benutzen. Demgemäfs verstehen wir unter $cos\,(iy)$ den Ausdruck $\frac{1}{2}(e^{i(iy)} + e^{-i(iy)})$ d. i.

$$cos\,(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

und auf gleiche Weise nehmen wir

$$sin\,(iy) = i\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Ebenso ist allgemeiner, wenn $u = x + iy$ gesetzt wird,

$$cos\,(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2}$$

oder, wenn e^{ix} und e^{-ix} durch $cos\,x$ und $sin\,x$ ausgedrückt werden,

$$1)\qquad cos\,(x + iy) = cos\,x\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} - i\,sin\,x\,\frac{e^y - e^{-y}}{2};$$

die Formel für $sin\,u$ giebt bei gleicher Behandlung

$$2)\qquad sin\,(x + iy) = sin\,x\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} + i\,cos\,x\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Zufolge der Werthe von $cos\,(iy)$ und $sin\,(iy)$ lassen sich die Gleichungen 1) und 2) auch so schreiben

$$cos\,(x + iy) = cos\,x\,cos\,(iy) - sin\,x\,sin\,(iy),$$
$$sin\,(x + iy) = sin\,x\,cos\,(iy) + cos\,x\,sin\,(iy),$$

woraus erhellt, dafs die bekannten goniometrischen Formeln für $cos\,(\alpha + \beta)$ und $sin\,(\alpha + \beta)$ auch bei imaginären β ihre Gültigkeit behalten.

Diese Bemerkung läfst sich noch verallgemeinern. Verbindet man nämlich die Formeln 1) und 2) mit den folgenden

$$cos\,(x' + iy') = cos\,x'\,\frac{e^{y'} + e^{-y'}}{2} - i\,sin\,x'\,\frac{e^{y'} + e^{-y'}}{2},$$

$$sin\,(x' + iy') = sin\,x'\,\frac{e^{y'} + e^{-y'}}{2} + i\,cos\,x'\,\frac{e^{y'} - e^{-y'}}{2},$$

so findet man leicht durch gewöhnliche Multiplication

$$cos\,(x + iy)\,cos\,(x' + iy') - sin\,(x + iy)\,sin\,(x' + iy')$$
$$= (cos\,x\,cos\,x' - sin\,x\,sin\,x')\,\frac{e^{y+y'} + e^{-(y+y')}}{2}$$
$$- i(sin\,x\,cos\,x' + cos\,x\,sin\,x')\,\frac{e^{y+y'} - e^{-(y+y')}}{2}$$
$$= cos\,(x + x')\,\frac{e^{y+y'} + e^{-(y+y')}}{2} - i\,sin\,(x + x')\,\frac{e^{y+y'} - e^{-(y+y')}}{2}$$
$$= cos\,[(x + x') + i\,(y + y')] = cos\,[(x + iy) + (x' + iy')];$$

rückwärts gelesen, giebt diefs den Satz, dafs die Formel für $cos\,(\alpha + \beta)$ auch bei complexen α und β richtig bleibt. Auf gleiche Weise über-

zeugt man sich von der entsprechenden Verallgemeinerung der Formel für $\sin(\alpha+\beta)$; überhaupt gelten nunmehr alle goniometrischen Formeln, in denen nur Cosinus und Sinus vorkommen, gleichförmig für reelle und complexe Bögen.

Die übrigen goniometrischen Functionen definiren wir nach Analogie durch die Gleichungen

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z},$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

wobei immer $z = x + iy$ sein möge. Hiernach ist z. B.

$$\sec(x+iy) = \frac{1}{\cos x \cdot \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) - i \sin x \cdot \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})},$$

oder, wenn Zähler und Nenner mit

$$\cos x \cdot \tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + i \sin x \cdot \tfrac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

multiplicirt wird,

$$3) \qquad \sec(x+iy) = 2\,\frac{\cos x\,(e^y + e^{-y}) + i \sin x\,(e^y - e^{-y})}{2\cos 2x + (e^{2y} + e^{-2y})}.$$

Man kann dafür auch schreiben

$$\sec(x+iy) = \frac{2\cos(x-iy)}{\cos 2x + \cos(2iy)},$$

und hat dann vollständige Übereinstimmung mit der Formel

$$\sec(\alpha+\beta) = \frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}.$$

Durch ganz ähnliche Umwandlungen ergeben sich die folgenden Formeln

$$4) \qquad \csc(x+iy) = 2\,\frac{\sin x\,(e^y + e^{-y}) - i\cos x\,(e^y - e^{-y})}{-2\cos 2x + (e^{2y} + e^{-2y})},$$

$$5) \qquad \tan(x+iy) = \frac{2\sin 2x + i\,(e^{2y} - e^{-2y})}{2\cos 2x + (e^{2y} + e^{-2y})},$$

$$6) \qquad \cot(x+iy) = \frac{2\sin 2x - i\,(e^{2y} + e^{-2y})}{-2\cos 2x + (e^{2y} + e^{-2y})};$$

überhaupt gelten nun alle goniometrischen Relationen gleichförmig für reelle und complexe Bögen.

Die beiden, in den vorigen Formeln öfter wiederkehrenden Functionen

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

nennt man nicht selten den hyperbolischn Cosinus und den hyperbolischen Sinus und bezeichnet sie entweder mit $\mathfrak{Cos}\, y$ und $\mathfrak{Sin}\, y$ oder zweckmäſsiger durch *cshp y* und *snhp y*. Demnach ist

7) $$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = cos\,(iy) = cshp\, y,$$

8) $$i\frac{e^y - e^{-y}}{2} = sin\,(iy) = i\, snhp\, y,$$

mithin können die Gleichungen 1) und 2) in folgender Gestalt dargestellt werden

9) $$cos\,(x + iy) = cos\, x\; cshp\, y - i\, sin\, x\; snhp\, y,$$

10) $$sin\,(x + iy) = sin\, x\; cshp\, y + i\, cos\, x\; snhp\, y.$$

Ebenso erhält man statt der Formeln 3) bis 6) die nachstehenden

11) $$sec\,(x + iy) = 2\,.\,\frac{cos\, x\; cshp\, y + i\, sin\, x\; snhp\, y}{cos\, 2x + cshp\, 2y},$$

12) $$csc\,(x + iy) = -2\,.\,\frac{sin\, x\; cshp\, y - i\, cos\, x\; shnp\, y}{cos\, 2x - cshp\, 2y},$$

13) $$tan\,(x + iy) = \frac{sin\, 2x + i\, snhp\, 2y}{cos\, 2x + cshp\, 2y},$$

14) $$cot\,(x + iy) = -\frac{sin\, 2x - i\, snhp\, 2y}{cos\, 2x - cshp\, 2y}.$$

§. 58.

Die cyclometrischen Functionen complexer Variabelen.

I. Wenn ζ eine reelle, die Grenzen -1 und $+1$ nicht überschreitende Zahl bedeutet, so giebt es unendlich viele Bögen z, welche der Gleichung $sin\, z = \zeta$ genügen; der kleinste, zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltene derartige Bogen heifst bekanntlich $arcsin\,\zeta$; die übrigen Bögen sind der Reihe nach

$$\pm\pi - arcsin\,\zeta, \quad \pm 2\pi + arcsin\,\zeta, \quad \pm 3\pi - arcsin\,\zeta, \; \ldots .$$

Bezeichnet man mit $Arcsin\,\zeta$ den allgemeinen Arcussinus d. h. irgend einen Bogen z, welcher der Gleichung $sin\, z = \zeta$ genügt, so sind alle Werthe der vieldeutigen Function $Arcsin\,\zeta$ in folgender Formel enthalten

1) $$Arcsin\,\zeta = m\pi + (-1)^m\, arcsin\,\zeta$$

wobei m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Dem analog verstehen wir unter $Arcsin\,(\xi + i\eta)$ jede complexe Variabele $x + iy$, deren Sinus $= \xi + i\eta$ ist; es gelten also die simultanen Gleichungen

2) $$Arcsin\,(\xi + i\eta) = x + iy,$$

$$\xi + i\eta = sin\,(x + iy) = sin\, x\,.\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} + i\, cos\, x\,.\,\frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

deren letzte giebt

$$\xi = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\, sin\, x, \qquad \eta = \frac{e^y - e^{-y}}{2}\, cos\, x.$$

Daraus folgt

$$1+\xi^2+\eta^2=\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^2+\sin^2 x$$

und wenn man hierzu die Gleichung

$$2\xi=2\,.\,\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x$$

erst addirt und dann subtrahirt, so erhält man jedesmal rechter Hand vollständige Quadrate mithin umgekehrt

$$3)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\sin x&=\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2},\\ \frac{e^y+e^{-y}}{2}-\sin x&=\sqrt{(1-\xi)^2+\eta^2}.\end{aligned}\right.$$

Die Wurzelwerthe müssen hier im absoluten Sinne genommen werden, weil bei reellen x und y

$$\tfrac{1}{2}(e^y+e^{-y})>1,\qquad \sin x<1$$

mithin jeder links stehende Ausdruck positiv ist. Die Gleichungen 3) führen nun zur Kenntnifs von x und y; setzt man zur Abkürzung

$$4)\qquad \sigma=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}+\sqrt{(1-\xi)^2+\eta^2}\right],$$

$$5)\qquad \tau=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}-\sqrt{(1-\xi)^2+\eta^2}\right],$$

so folgt erstens

$$\sin x=\tau\quad\text{mithin}\quad x=Arcsin\,\tau,$$

zweitens

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\sigma\quad\text{mithin}\quad y=l(\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-1}).$$

Wegen

$$\sigma-\sqrt{\sigma^2-1}=\frac{1}{\sigma+\sqrt{\sigma^2-1}}$$

kann man den Werth von y auch in folgender Form schreiben

$$y=\pm\, l(\sigma+\sqrt{\sigma^2-1})$$

und hat dann $\sqrt{\sigma^2-1}$ im absoluten Sinne zu nehmen. Bezeichnet ε eine reelle positive oder negative Einheit, so ist vermöge der Werthe von x und y

$$Arcsin\,(\xi+i\eta)=Arcsin\,\tau+i\,\varepsilon\, l(\sigma+\sqrt{\sigma^2-1}),$$

oder, wenn $Arcsin\,\tau$ durch $arcsin\,\tau$ ausgedrückt wird,

$$6)\quad Arcsin\,(\xi+i\eta)=m\pi+(-1)^m\,arcsin\,\tau+i\,\varepsilon\, l(\sigma+\sqrt{\sigma^2-1}).$$

Um zu bestimmen, in welchen Fällen $\varepsilon=+1$ und in welchen $\varepsilon=-1$ zu setzen ist, nehmen wir speciell $\xi=0$ und η positiv, worin keine Beschränkung liegt, weil $i(-\eta)=(-i)\eta$ ist und daher

das etwaige negative Zeichen von η auf Rechnung des i geschrieben werden kann; es ist nun $\tau = 0$, $\sigma = \sqrt{1+\eta^2}$ mithin

$$Arcsin\,(i\eta) = m\pi + i\,\varepsilon\,l(\sqrt{1+\eta^2}+\eta)$$

und daher mufs umgekehrt die Gleichung

7) $$i\eta = sin\,[m\pi + i\,\varepsilon\,l(\sqrt{1+\eta^2}+\eta)]$$

stattfinden. Setzt man für den Augenblick

$$l(\sqrt{1+\eta^2}+\eta) = \lambda,$$

woraus folgt

8) $$e^{\lambda} = \sqrt{1+\eta^2}+\eta, \qquad e^{-\lambda} = \sqrt{1+\eta^2}-\eta,$$

so geht die Gleichung 7) über in

$$i\eta = sin\,(m\pi + i\,\varepsilon\,\lambda) = cos\,m\pi\,.\,sin\,(i\,\varepsilon\,\lambda)$$

$$= (-1)^m\,\varepsilon\,sin\,(i\,\lambda) = (-1)^m\,\varepsilon\,i\,.\,\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}$$

d. i. nach No. 8)

$$i\eta = (-1)^m\,\varepsilon\,i\,\eta,$$

und daraus geht hervor $\varepsilon = (-1)^m$. Die Formel 6) gestaltet sich hiernach zur folgenden

9) $$Arcsin\,(\xi + i\eta) = m\pi + (-1)^m[arcsin\,\tau + i\,l(\sigma + \sqrt{\sigma^2-1})],$$

worin m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Versteht man *arcsin* $(\xi + i\eta)$ denjenigen speciellen Werth von *Arcsin* $(\xi + i\eta)$, dessen reeller Theil am kleinsten ist, nämlich

10) $$arcsin\,(\xi + i\eta) = arcsin\,\tau + i\,l(\sigma + \sqrt{\sigma^2-1}),$$

so erkennt man augenblicklich, dafs die Formel 1) auch bei complexen ζ richtig bleibt.

Als specielle Fälle sind die folgenden bemerkenswerth. Für $\eta = 0$ und $\xi^2 < 1$ wird aus No. 4) und No. 5)

$$\sigma = \frac{1+\xi+(1-\xi)}{2} = 1, \qquad \tau = \frac{1+\xi-(1-\xi)}{2} = \xi$$

mithin aus No. 10) $arcsin\,\xi = arcsin\,\xi$. Dagegen ist für $\eta = 0$ und $\xi^2 > 1$

$$\sigma = \frac{\xi+1+(\xi-1)}{2} = \xi, \qquad \tau = \frac{\xi+1-(\xi-1)}{2} = 1$$

mithin

11) $$arcsin\,\xi = \tfrac{1}{2}\pi + i\,l(\xi + \sqrt{\xi^2-1}), \quad \xi^2 > 1;$$

dieses Resultat wird nicht überraschen wenn man berücksichtigt, dafs es keinen reellen Bogen geben kann, dessen Sinus die Einheit übersteigt.

Für $\xi = 0$ und positive η folgt aus den Formeln 4), 5) und 10)

12) $$arcsin\,(i\eta) = i\,l(\sqrt{1+\eta^2}+\eta).$$

II. Betrachtet man eine reelle, die Grenzen -1 und $+1$ nicht überschreitende Zahl ζ als Cosinus eines Bogens, so bedeutet $\arccos\zeta$ den kleinsten, zwischen 0 und π enthaltenen zugehörigen Bogen; der allgemeine Arcuscosinus dagegen bestimmt sich durch die Formel

13) $$Arccos\,\zeta = 2m\pi \pm \arccos\zeta,$$

worin m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet und ebensowohl das positive als das negative Zeichen von $\arccos\zeta$ genommen werden darf.

Es sei nun analog der Definition von $Arccos\,\zeta$

14) $$Arccos\,(\xi + i\eta) = x + iy$$

und umgekehrt

$$\xi + i\eta = \cos(x + iy) = \cos x\,.\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} - i\sin x\,.\,\frac{e^y - e^{-y}}{2};$$

es sind dann x und y aus den Gleichungen

$$\xi = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x, \qquad \eta = -\frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x$$

zu bestimmen. Durch eine ganz ähnliche Rechnung wie in I findet man leicht

$$\cos x = \tau \quad \text{mithin} \quad x = Arccos\,\tau$$
$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sigma \quad \text{mithin} \quad y = \varepsilon\, l(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})$$

mithin nach No. 14), wenn gleichzeitig $Arccos\,\tau$ durch $\arccos\tau$ ausgedrückt wird,

15) $$Arccos\,(\xi + i\eta) = 2m\pi \pm \arccos\tau + i\,\varepsilon\, l(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}).$$

Zur Bestimmung von ε läſst sich wieder die Specialisirung $\xi = 0$, $\eta > 0$ benutzen; sie giebt nach der vorigen Bezeichnung

$$Arccos\,(i\eta) = 2m\pi \pm \tfrac{1}{2}\pi + i\,\varepsilon\, l(\sqrt{1 + \eta^2} - \eta)$$

und umgekehrt

$$i\eta = \cos(2m\pi \pm \tfrac{1}{2}\pi + i\,\varepsilon\,\lambda) = \mp \sin(i\,\varepsilon\,\lambda)$$
$$= \mp\,\varepsilon \sin(i\,\lambda) = \mp\,\varepsilon\, i\,\eta.$$

Daraus geht hervor, daſs ε negativ oder positiv zu nehmen ist, jenachdem $\arccos\tau$ in No. 15) das obere oder untere Vorzeichen hat; die allgemeine Formel lautet hiernach

16) $$Arccos\,(\xi + i\eta) = 2m\pi \pm \left\{\arccos\tau - i\, l(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})\right\}.$$

Definirt man $\arccos(\xi + i\eta)$ durch die Gleichung

17) $$\arccos(\xi + i\eta) = \arccos\tau - i\, l(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})$$

so erhellt augenblicklich, daſs die Formel 14) auch für complexe ζ richtig bleibt. Ferner zeigt die Addition der Gleichungen 10) und 17), daſs die Formel

$$\arcsin\zeta + \arccos\zeta = \tfrac{1}{2}\pi$$

auch für complexe ζ fortbesteht.

Die Formeln 10) und 17) erhalten übrigens eine sehr elegante Gestalt, wenn man den hyperbolischen Cosinus von y mit *cshp* y und dem entsprechend die aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \sigma \quad \text{oder} \quad cshp\, y = \sigma$$

folgende umgekehrte Function mit $y = Arc\ cshp\ \sigma$ bezeichnet. Diese ist zweideutig wegen

$$y = \pm\, l(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})$$

verstehen wir aber unter *arc cshp* σ ihren absoluten Werth, so haben wir statt der Gleichungen 10) und 17) die folgenden*)

$$18)\quad \begin{cases} arcsin\,(\xi + i\eta) = arcsin\,\tau + i\ arc\ cshp\ \sigma, \\ arccos\,(\xi + i\eta) = arccos\,\tau - i\ arc\ cshp\ \sigma. \end{cases}$$

III. Dem Früheren analog möge *arctan* ζ den kleinsten, zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltenen Bogen bedeuten, welcher die reelle Zahl ζ zur Tangente hat, dagegen bezeichne *Arctan* ζ irgend einen zur Tangente $= \zeta$ gehörigen Bogen; es ist dann, unter m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl verstanden,

$$19)\qquad Arctan\,\zeta = m\pi + arctan\,\zeta.$$

Es sei nun allgemeiner

$$20)\qquad Arctan\,(\xi + i\eta) = x + iy$$

wenn umgekehrt die Gleichung

$$\xi + i\eta = tan\,(x + iy) = \frac{sin\,(x + iy)}{cos\,(x + iy)}$$

stattfindet. Substituirt man rechter Hand die gleichgeltenden Ausdrücke No. 1) und 2) in §. 57 und setzt zur Abkürzung

$$21)\qquad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = q,$$

so geht die vorige Gleichung über in

$$\xi + i\eta = \frac{tan\,x + iq}{1 - iq\,tan\,x},$$

und daraus folgen nach Wegschaffung des Bruches und Vergleichung des Reellen und Imaginären die Gleichungen

$$22)\qquad tan\,x = \xi + \eta q\,tan\,x, \quad q = \eta - \xi q\,tan\,x.$$

Die Elimination von q giebt nun

$$\frac{1}{tan\,x} - tan\,x = \frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{\xi} \quad \text{oder} \quad tan\,2x = \frac{2\xi}{1 - \xi^2 - \eta^2}$$

---

*) Die Werthe von *Arcsin* $(\xi + i\eta)$ und *Arccos* $(\xi + i\eta)$ sind zuerst von Cauchy untersucht aber durch unbequeme Formeln dargestellt worden (*Cours d'Analyse algèbrique*, Chap. IX); die in I und II entwickelten Formeln hat der Verf. im 17. Jahrg. d. Zeitschrift für Mathematik und Physik mitgetheilt.

mithin ist umgekehrt

23) $$x = \frac{1}{2} Arctan \frac{2\xi}{1 - (\xi^2 + \eta^2)}.$$

Andererseits liefern die Gleichungen 22) durch Elimination von $tan\, x$

$$\frac{1}{q} + q = \frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{\eta}$$

und daraus folgt weiter

$$\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2 = \frac{\frac{1}{q} + q + 2}{\frac{1}{q} + q - 2} = \frac{\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\eta} + 2}{\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\eta} - 2}$$

mithin

24) $$\frac{1+q}{1-q} = \sqrt{\frac{\xi^2 + (1+\eta)^2}{\xi^2 + (1-\eta)^2}};$$

hierbei ist die Wurzel im absoluten Sinne zu nehmen weil bei reellen y aus No. 21) hervorgeht, dafs $q < 1$ mithin $\frac{1+q}{1-q}$ positiv sein mufs. Setzt man in No. 24) den Werth von q aus No. 21) ein, so erhält man

$$e^{2y} = \sqrt{\frac{\xi^2 + (1+\eta)^2}{\xi^2 + (1-\eta)^2}} \quad \text{daher} \quad y = \frac{1}{4} l \left[\frac{\xi^2 + (1+\eta)^2}{\xi^2 + (1-\eta)^2}\right].$$

Vermöge der Werthe von x und y ist nun

25) $$Arctan(\xi + i\eta) = \frac{1}{2} Arctan \frac{2\xi}{1 - (\xi^2 + \eta^2)} + \frac{i}{4} l \left[\frac{\xi^2 + (1+\eta)^2}{\xi^2 + (1-\eta)^2}\right].$$

Diese Gleichung bedarf einer weiteren Discussion, weil der erste Ausdruck rechter Hand eine Unterbrechung der Continuität erleidet, sobald der Nenner $1 - (\xi^2 + \eta^2)$ aus dem Positiven durch Null ins Negative übergeht. Behufs einer solchen Discussion verfolgen wir den naheliegenden Gedanken, die Gleichung 25) einfach zu verificiren mittelst der Formel

26) $$tan\,(u + iv) = \frac{sin\, 2u + i \cdot \frac{1}{2}(e^v - e^{-v})}{cos\, 2u + i \cdot \frac{1}{2}(e^v + e^{-v})}.$$

Es sei erstens $\xi^2 + \eta^2 < 1$ und zur Abkürzung

27) $$arctan \frac{2\xi}{1 - (\xi^2 + \eta^2)} = \alpha, \quad (-\tfrac{1}{2}\pi < \alpha < +\tfrac{1}{2}\pi)$$

mithin

$$Arctan \frac{2\xi}{1 - (\xi^2 + \eta^2)} = m\pi + \alpha$$

und ferner

28) $$\frac{1}{4} l \left[\frac{\xi^2 + (1+\eta)^2}{\xi^2 + (1-\eta)^2}\right] = \beta.$$

Die Formel 25) lautet nun

29 $$Arctan\,(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}(m\pi + \alpha) + i\beta$$

und daher mufs umgekehrt sein

30) $$\xi + i\eta = tan\left(\frac{m\pi + \alpha}{2} + i\beta\right)$$

$$= \frac{sin\,(m\pi + \alpha) + i\,\frac{1}{2}(e^{2\beta} - e^{-2\beta})}{cos\,(m\pi + \alpha) + i\,\frac{1}{2}(e^{2\beta} + e^{-2\beta})}$$

$$= \frac{cos\,m\pi\;\;sin\,\alpha + i\,\frac{1}{2}(e^{2\beta} - e^{-2\beta})}{cos\,m\pi\;\;cos\,\alpha + i\,\frac{1}{2}(e^{2\beta} + e^{-2\beta})}.$$

Aus dem oben angegebenen Werthe von α folgt nun

$$tan\,\alpha = \frac{2\xi}{1 - (\xi^2 + \eta^2)},$$

$$cos\,\alpha = \frac{1 - (\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2}}, \quad sin\,\alpha = \frac{2\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2}};$$

da α zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt mithin $cos\,\alpha$ positiv ausfallen mufs, so kann, wegen des positiven Zählers von $cos\,\alpha$, die Wurzel nur im absoluten Sinne genommen werden. Aus dem Werthe von β findet sich weiter

$$\tfrac{1}{2}(e^{2\beta} + e^{-2\beta}) = \frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{\sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2}},$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{2\beta} + e^{-2\beta}) = \frac{2\eta}{\sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2}},$$

wo aus ähnlichen Gründen wie vorhin die Wurzel im absoluten Sinne zu nehmen ist. Substituirt man die letzten vier Werthe in die Formel 30), so erhält man

$$\xi + i\eta = 2\,\frac{\xi\,cos\,m\pi + i\eta}{1 + cos\,m\pi + (\xi^2 + \eta^2)\,(1 - cos\,m\pi)}$$

und daraus geht hervor, dafs m eine positive oder negative gerade Zahl sein mufs, denn für ungerades m würde die rechte Seite nicht in $\xi + i\eta$ übergehen.

Zweitens sei $\xi^2 + \eta^2 > 1$ und zur Abkürzung

$$arctan\,\frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 - 1} = \alpha', \quad (-\tfrac{1}{2}\pi < \alpha' < +\tfrac{1}{2}\pi)$$

mithin

$$Arctan\,\frac{2\xi}{1 - (\xi^2 + \eta^2)} = m\pi - \alpha',$$

unter β werde dieselbe Gröfse wie im ersten Falle verstanden; die Formel 25) lautet jetzt

31) $$Arctan\,(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}(m\pi - \alpha') + i\beta$$

woraus umgekehrt folgt

32) $$\xi + i\eta = \frac{-\cos m\pi \sin \alpha' + i\,\frac{1}{2}(e^{2\beta} - e^{-2\beta})}{\cos m\pi \cos \alpha' + i\,\frac{1}{2}(e^{2\beta} + e^{-2\beta})}.$$

Zufolge des Werthes von α' ist nun

$$\cos \alpha' = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2) + 4\xi^2}}, \quad \sin \alpha' = \frac{2\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2}}$$

und hier mufs die Wurzel im absoluten Sinne genommen werden, damit $\cos \alpha'$ positiv ausfällt. Die Werthe der Exponentialgröfsen sind die nämlichen wie vorhin, und damit ergiebt sich aus No. 32)

$$\xi + i\eta = 2\,\frac{-\xi \cos m\pi + i\eta}{1 - \cos m\pi + (\xi^2 + \eta^2)(1 + \cos m\pi)};$$

diese Gleichung zeigt, dafs m eine positive oder negative ungerade Zahl sein mufs.

Aus den Formeln 29) und 31) erhält man schliefslich, wenn in der ersten $m = 2n$, in der zweiten $m = 2n + 1$ gesetzt wird und die Werthe von α, β und α' substituirt werden,

33) $$Arctan(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2} \arctan \frac{2\xi}{1 - (\xi^2 + \eta^2)} + \frac{i}{4}\, l\left[\frac{\xi^2 + (1 + \eta)^2}{\xi^2 + (1 - \eta)^2}\right], \quad \xi^2 + \eta^2 < 1,$$

34) $$Arctan(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\left\{\pi - \arctan \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 - 1}\right\} + \frac{i}{4}\, l\left[\frac{\xi^2 + (1 + \eta)^2}{\xi^2 + (1 - \eta)^2}\right], \quad \xi^2 + \eta^2 > 1,$$

worin n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

In dem speciellen Falle $n = 0$ schreiben wir *arctan* statt *Arctan* und haben

35) $$\arctan(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} \arctan \frac{2\xi}{1 - (\xi^2 + \eta^2)} + \frac{i}{4}\, l\left[\frac{\xi^2 + (1 + \eta)^2}{\xi^2 + (1 - \eta)^2}\right], \quad \xi^2 + \eta^2 < 1,$$

36) $$\arctan(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\left\{\pi - \arctan \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 - 1}\right\} + \frac{i}{4}\, l\left[\frac{\xi^2 + (1 + \eta)^2}{\xi^2 + (1 - \eta)^2}\right], \quad \xi^2 + \eta^2 > 1;$$

der Vergleich mit den vorigen Formeln zeigt, dafs die Relation

$$Arctan\, \zeta = n\pi + \arctan \zeta$$

auch bei complexen ζ ihre Richtigkeit behält.

Für $\xi = 0$ ergeben sich die besonderen Formeln

37) $$\arctan(i\eta) = \frac{i}{4}\, l\left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta}\right)^2, \quad \eta^2 < 1,$$

38) $$\arctan(i\eta) = \frac{\pi}{2} + \frac{i}{4}\, l\left(\frac{\eta + 1}{\eta - 1}\right)^2, \quad \eta^2 > 1;$$

Die Function *arctan* $(i\eta)$ ändert sich also sprungweis an den Stellen $\eta = +1$ und $\eta = -1$.

Auf ähnliche Weise können die Functionen *arc cot* $(\xi + i\eta)$, *arc sec* $(\xi + i\eta)$ und *arc csc* $(\xi + i\eta)$ in ihre reellen und imaginären Bestandtheile zerlegt werden; das seltene Vorkommen dieser Functionen macht aber eine ausführliche Untersuchung hierüber unnöthig.

§. 59.

Die Bedeutung der complexen Zahlen.

Für denjenigen, der nur positive ganze Zahlen und positive rationale Brüche kennt, also z. B. für jeden, der sich nur auf die Rechnungen des bürgerlichen Lebens versteht, sind irrationale Zahlen und negative Zahlen reine Unmöglichkeiten; diese Unmöglichkeit ist aber, von einem höheren Standpunkte aus betrachtet, keine absolute, sondern eine relative, und sie läfst sich in der That durch eine Erweiterung des Zahlengebietes wegschaffen. Wenn wir nun die Zahl $\sqrt{-1}$ eine unmögliche nennen, so ist diefs allerdings in so fern richtig, als es in der bis jetzt aufgestellten Zahlenreihe

$$..-3, ..-2, ..-1, ..0, ..+1, ..+2, ..+3, ..$$

keine Zahl giebt, deren Quadrat $= -1$ wäre, und es also unmöglich ist, sie darin zu finden; doch wäre es auch in diesem Falle denkbar, dafs eine passende Erweiterung des Zahlengebietes zu einer reellen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ führen könnte. Eine derartige Erweiterung kann aber in der Längenrichtung der Zahlenreihe nicht vorgenommen werden, weil bereits nachgewiesen ist, dafs die Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig, d. h. lückenlos verläuft, dafs die also in dieser Richtung bereits alles Mögliche umfafst; es bleibt daher nur übrig, das Zahlengebiet seitlich zu erweitern, oder mit anderen Worten, das Zahlengebiet nicht als einfache, sondern als Doppelreihe zu betrachten. Diese Bemerkung gewinnt an Gewicht, wenn wir auf die Entstehungsweise der Zahlen zurückblicken.

Ist nämlich eine Reihe gleichartiger Gröfsen

$$\dots d', c', b', a, b, c, d, \dots$$

gegeben, so dienen die Zahlen

$$\dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots$$

um jenen Gröfsen ihre Stellen in der obigen Reihe anzuweisen, wefshalb man auch in vielen Fällen die sprechendere Bezeichnung

$$\dots a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

anwendet; die Zahlen sind demnach die Stellenzeiger der Gröfsen.

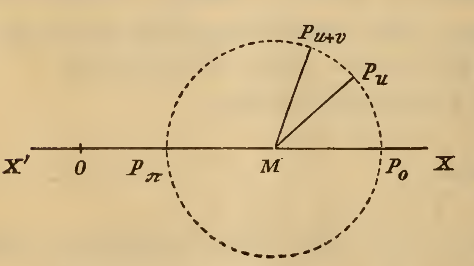
Dabei ist jedoch die stillschweigende Voraussetzung gemacht, dafs es möglich sei, die gegebenen Gröfsen in eine **einfache** Reihe zu ordnen; kommen aber Gröfsen vor, welche sich einer derartigen Anordnung nicht fügen, wie z. B. die Glieder einer Doppelreihe, so reicht man natürlich mit den Stellenzeigern einer einfachen Reihe nicht mehr aus, und das Zahlengebiet mufs nun selbst zu einer Doppelreihe erweitert werden.

Denken wir uns eine Doppelreihe von Gröfsen nach dem Schema

$$\begin{array}{c}
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\ldots \mathfrak{E}',\ \mathfrak{D}',\ \mathfrak{C}',\ \mathfrak{B}',\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \ldots\\
\ldots E',\ D',\ C',\ B',\ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ \ldots\\
\ldots \varepsilon',\ \delta',\ \gamma',\ \beta',\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \ldots\\
\ldots e',\ d',\ c',\ b',\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \ldots\\
\ldots \mathfrak{e}',\ \mathfrak{d}',\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e},\ \ldots\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

und darin α als Anfangspunkt, so ist der Übergang von α zu einer beliebigen anderen Gröfse, z. B. $\mathfrak{E}$, auf sehr verschiedene Weisen möglich, man könnte in dem vorliegenden Falle die Wege $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon E\mathfrak{E}$ oder $\alpha\beta\gamma D\mathfrak{E}$ einschlagen, also von einer Stelle der Reihe $\alpha\beta\gamma\ldots$ aus in verschiedenen Richtungen fortgehen, um nach $\mathfrak{E}$ zu gelangen. Ist die Doppelreihe eine stetig erfüllte, so dafs also an jeder denkbaren Stelle eine Gröfse steht, so bilden diese Gröfsen zusammen auf dieselbe Weise eine **Gröfsenebene**, wie die einfache stetige Gröfsenreihe eine **Gröfsenlinie** darstellt; wir können daher der Anschaulichkeit wegen die Sache unter einem geometrischen Gesichtspunkte betrachten, und es ist diefs ebensowenig eine **Anwendung** auf die Geometrie, als es die Vergleichung der einfach continuirlichen Gröfsenreihe mit der Geraden sein würde. Nehmen wir in Fig. 11 die Gerade $X'X$ für die Reihe $\ldots\gamma'\beta'\alpha\beta\gamma\ldots$ und den Punkt O für die Gröfse α, so kann der Übergang von O zu einer beliebigen an der Stelle P_u stehenden Gröfse dadurch geschehen, dafs man zunächst eine Strecke OM auf OX fortgeht und sich dann von M nach P_u wendet. Die absolute Länge von OM heifse x, die von MP_u sei y, so ist im Ganzen der Weg $x+y$ zurückgelegt worden, wobei es aber noch eines Kennzeichens bedarf, um an-

Fig. 11.



zudeuten, daſs die Richtung des y von der des x verschieden ist. Zu diesem Zwecke wollen wir unter dem Zeichen y_u eine Gerade MP_u verstehen, welche die Länge y besitzt und die mit ihrer anfänglichen Lage MP_0 den Winkel $P_0MP_u = u$ einschlieſst. Der zurückgelegte Weg ist dann

1) $$x + y_u$$

und sowie hier x der Stellenzeiger des Punktes M oder der daselbst befindlichen Gröſse ist, so bedeutet $x + y_u$ den Stellenzeiger des Punktes P_u. Für $u = 0$ hat man $x + y_0$ als Stellenzeiger von P_0, und da andererseits $OP_0 = x + y$ ist, so folgt

2) $$y_0 = y = y \cdot (+1);$$

für $u = \pi$ dagegen ist $x + y_\pi$ der Stellenzeiger von P_π, und da $OP_\pi = x - y$, so ergiebt sich

3) $$y_\pi = -y = y \cdot (-1).$$

Aus diesen Werthen schlieſst man durch Induction, daſs der allgemeine Ausdruck y_u aus zwei Factoren besteht, deren erster y selbst, d. h. die Länge des Weges MP_u ist, und deren zweiter von dem Winkel u abhängt, indem er die Gröſse der Ablenkung u angiebt. Wir setzen daher

4) $$y_u = y \cdot f(u)$$

und suchen die unbekannte Function $f(u)$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sei MP_{u+v} eine zweite Gerade, welche mit OX den Winkel $XMP_{u+v} = u + v$ einschlieſst und der Länge nach ebenfalls $= y$ ist; man hat dann

5) $$y_{u+v} = y \cdot f(u + v).$$

In so fern aber die Gerade y_{u+v} ihrer Richtung nach um den Winkel v von y_u abweicht, muſs auch die Gleichung

$$x_{u+v} = y_u \cdot f(v)$$

stattfinden, indem man y_u als die ursprüngliche und y_{u+v} als die abgelenkte Gerade ansieht; durch Substitution von y_u aus No. 4) verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$y_{u+v} = y \cdot f(u) \cdot f(v),$$

deren Vergleichung mit No. 5) zu der Bedingung

$$f(u) \cdot f(v) = f(u + v)$$

führt. Hieraus bestimmt sich die Natur der Function $f(u)$; nach §. 41 ist nämlich

$$f(u) = [f(1)]^u$$

oder kürzer, wenn die constante Gröſse $f(1)$ mit a bezeichnet wird,

$$f(u) = a^u.$$

Der Werth von a wird durch die Bemerkung gefunden, dafs die nunmehrige Gleichung

6) $$y_u = y\, a^u$$

für $u = \pi$ mit der Formel 3) zusammenfallen mufs; man erhält so

$$y_\pi = y\, a^\pi = y\, .\, (-1)$$

und folglich

$$a = (-1)^{\frac{1}{\pi}}.$$

Aus der Gleichung 6) wird jetzt vermöge dieses Werthes von a

7) $$y_u = y\, [(-1)^{\frac{1}{\pi}}]^u = y\, (-1)^{\frac{u}{\pi}}.$$

Ist der Ablenkungswinkel ein rechter, also $u = \frac{1}{2}\pi$, so folgt

8) $$y_{\frac{1}{2}\pi} = y\, (-1)^{\frac{1}{2}} = y \sqrt{-1}$$

und es bedeutet demnach $y\sqrt{-1}$ eine Gerade, welche die Länge y besitzt, aber senkrecht auf ihrer ursprünglichen Richtung steht. Für $OM = x$ und ein rechtwinklig darauf errichtetes $MP = y$ ist nunmehr

$$x + y\sqrt{-1}$$

der Stellenzeiger des Punktes P oder der an dieser Stelle stehenden Gröfse. Für $u = \frac{3}{2}\pi$ würde sich auf ähnliche Weise

$$y_{\frac{3}{2}\pi} = y\, (-1)^{\frac{3}{2}} = y\, (-1) \sqrt{-1} = -y\sqrt{-1}$$

ergeben, wonach der Ausdruck

$$x - y\sqrt{-1}$$

als Stellenzeiger des unterhalb liegenden Punktes P' gelten mufs.

In dieser Untersuchung liegt nun die reelle Bedeutung der complexen Zahlen. Auf dieselbe Weise nämlich, wie eine reelle Zahl x das Mittel ist, um sich eine bestimmte Stelle der einfachen Gröfsenreihe zu vergegenwärtigen und vor der Einbildung festzuhalten, so dient die Zahl $x + iy$ zur Fixirung einer bestimmten Stelle in der Doppelreihe von Gröfsen; setzen wir z. B. voraus, dafs in der auf Seite 264 verzeichneten Doppelreihe ε, von α aus gerechnet, an der Stelle x, und $\mathfrak{E}$, von ε aus gezählt, an der Stelle y stehe, so ist

$x + iy$ der Stellenzeiger von $\mathfrak{E}$
$x - iy$ - - - $\mathfrak{e}$
$-x + iy$ - - - $\mathfrak{E}'$
$-x - iy$ - - - $\mathfrak{e}'$

Zugleich ergiebt sich, dafs die Zahlen $+i$ und $-i$ für die laterale Erweiterung des Zahlengebietes dasselbe sind, wie $+1$ und -1 für die longitudinale Fortsetzung desselben. Während nämlich $+1$ einen

Schritt vorwärts (etwa nach rechts) in der einfachen Zahlenreihe α, β, γ, ... bezeichnet und -1 einen Schritt rückwärts (nach links), so geschieht der Übergang von einem Gliede der Reihe α, β, γ, ... zu dem entsprechenden Gliede der darüberstehenden Reihe (z. B. der Schritt von δ nach D) mittelst der Zahl $+i$ und der umgekehrte Übergang zu dem entsprechenden Gliede der nächst tieferen Reihe (z. B. der Schritt von δ nach d) mittelst der Zahl $-i$*).

Noch mögen einige Bemerkungen über die Constructionen folgen, welche zur geometrischen Darstellung der Addition, Subtraction, Multiplication und Division complexer Zahlen dienen.

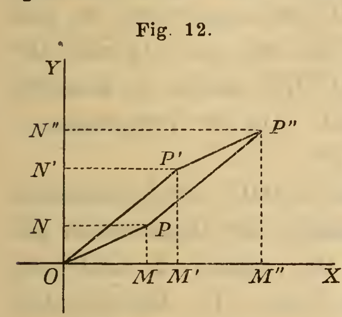


Fig. 12.

In Fig. 12 sei $OM = x$, $ON = y$, mithin $x + iy$ der Stellenzeiger desjenigen Punktes P, welcher die Coordinaten x und y besitzt, ferner sei $x' + iy'$ der Stellenzeiger eines zweiten Punktes P', so kann man fragen, welcher Punkt P'' der Summe $x + iy + (x' + iy')$ entspricht. Nach der Regel für die Addition complexer Zahlen ist P'' derjenige Punkt, dessen Coordinaten $OM'' = x + x'$ und $ON'' = y + y'$ sind. Aus naheliegenden geometrischen Gründen bildet P'' die vierte Ecke des aus den Seiten OP und OP' gebildeten Parallelogrammes, er kann also, wenn P und P' gegeben sind, unmittelbar d. h. ohne vorherige Aufsuchung von x, x', y, y' construirt werden. Ganz analog gestaltet sich die geometrische Darstellung einer Differenz; in diesem Falle sind etwa P'' und P' gegeben, aus denen P durch eine leicht aufzufindende Construction hergeleitet wird.

Um das Product zweier complexen Zahlen zu construiren, denken wir uns die beiden Factoren durch Modulus und Amplitude ausgedrückt, nämlich

$$x + iy = r\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$x' + iy' = r'\,(\cos\theta' + i\sin\theta').$$

*) Die obige Deutung der complexen Zahlen ist schon 1750 von H. Kühn (*Novi comment. Acad. Petropol. ad annum* 1750) angeregt, aber erst von Gaufs begründet worden (Göttinger gelehrte Anzeigen, Jahrg. 1831, S. 64). Den im Texte gegebenen Beweis nebst einer Geschichte aller hierher gehörenden Arbeiten verdankt man W. Drobisch (Berichte über die Verhandl. d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Bd. II, S. 171). Später hat Möbius gezeigt, wie man mittelst der obigen Construction Eigenschaften von Punkten in einer Geraden auf Punkte in einer Ebene übertragen und damit zu neuen Verwandtschaften zwischen Punktesystemen gelangen kann. (Bericht d. K. S. Ges. d. Wissensch. Jahrg. 1852, S. 41 u. Jahrg. 1853, S. 14.)

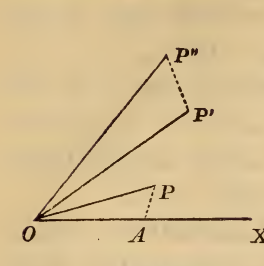


Fig. 13.

In Fig. 13 sei ferner $OP = r$, $\angle\, XOP = \theta$, $OP' = r'$, $\angle\, X'OP' = \theta'$, es sind dann P und P' die Repräsentanten der beiden complexen Factoren. Da nun

$$(x + iy)(x' + iy') = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

ist, so wird das Product durch einen Punkt dargestellt, dessen Modulus rr' und dessen Amplitude $\theta + \theta'$ beträgt. Um zunächst rr' als Linie construiren zu können, nehmen wir auf der x-Achse die Strecke OA gleich der Längeneinheit, ziehen AP und construiren ein dem Dreiecke OAP ähnliches Dreieck $OP'P''$ der Art, dafs OA und OP' entsprechende Seiten, $\angle\, AOP$ und $\angle\, P'OP''$ gleiche in derselben Drehungsrichtung genommene Winkel sind. Aus der Proportion

$$OA : OP = OP' : OP''$$

folgt nun $OP'' = OP \,.\, OP' = rr'$, mithin ist OP'' der Radiusvector von P'' wenigstens der Gröfse nach. Zufolge der Construction hat man ferner $\angle\, XOP'' = \theta + \theta'$, mithin ist zugleich $\angle\, XOP''$ die Amplitude von P'', also P'' der gesuchte Punkt. Die Multiplication der beiden gegebenen Factoren besteht hiernach darin, dafs der Modulus r im Verhältniss von $1 : r'$ vergröfsert und gleichzeitig die Amplitude θ um θ' vermehrt wird. Auf ganz ähnliche Weise läfst sich der Quotient zweier complexen Zahlen construiren.

Capitel XI.

Die complexen Reihen und Producte.

§. 60.

Grundbegriffe.

Auf gleiche Weise, wie wir den Begriff der Function in so fern erweitert haben, als wir uns nicht mehr auf reelle Variabele beschränken, ist auch der Begriff der Reihe einer Verallgemeinerung fähig, indem an die Stelle der früheren reellen Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

eine Reihe complexer Zahlen gesetzt werden kann. Ist diese complexe Reihe eine endliche

$$(v_0 + iw_0) + (v_1 + iw_1) + (v_2 + iw_2) + \cdots + (v_{n-1} + iw_{n-1}),$$

so hat die Betrachtung derselben keine Schwierigkeit, da die endliche Reihe als Summe einer endlichen Anzahl Summanden erscheint und demgemäſs auch unter der Form

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}$$
$$+ i(w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1})$$

dargestellt werden kann. Geht aber die Reihe ins Unendliche fort, so entsteht, wie früher, die Frage nach ihrer Convergenz oder Divergenz, wobei es jedoch vorher einer Verständigung darüber bedarf, was Convergenz oder Divergenz einer complexen Reihe heiſsen soll. Hierüber zu entscheiden, ist nicht schwer, wenn man sich erinnert, daſs nur convergente reelle Reihen einer bestimmten reellen Zahl gleich gesetzt werden dürfen, welche letztere dann die Summe der Reihe ist; behalten wir diese Definition ungeändert bei, so heiſst die complexe Reihe

$$(v_0 + iw_0) + (v_1 + iw_1) + (v_2 + iw_2) + \cdots$$

convergent, wenn sich eine bestimmte complexe Zahl $V + iW$ finden läſst, welcher die obige Reihe gleichgesetzt werden darf; daraus folgt

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots = V$$
$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots = W$$

und hier müssen nun die einzelnen reellen Reihen convergiren, weil sie auſserdem keine bestimmten Summen V und W haben würden. Man kann demnach die Definition der Convergenz einer complexen Reihe auch folgendermaaſsen ausdrücken:

Die complexe unendliche Reihe

$$(v_0 + iw_0) + (v_1 + iw_1) + (v_2 + iw_2) + \cdots$$

heiſst convergent, wenn die reellen Reihen

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$
$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

gleichzeitig convergiren, divergent dagegen, sobald die eine oder andere der genannten reellen Reihen divergirt oder beide divergiren.

Dieser Definition zufolge reducirt sich die Untersuchung der Convergenz oder Divergenz unendlicher complexer Reihen auf die Prüfung zweier reellen Reihen und kann demnach unter Zuziehung von Cap. V. jederzeit durchgeführt werden. Setzen wir z. B. voraus, es sei eine reelle Reihe von der Form

1) $$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$

dadurch in eine complexe Reihe übergegangen, daſs $z(\cos\theta + i\sin\theta)$ an die Stelle von z getreten ist, so hat man die complexe Reihe

2) $A_0 + A_1 z (\cos\theta + i \sin\theta) + A_2 z^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + A_3 z^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + \dots$

und als reelle Reihen daraus

$$A_0 + A_1 z \cos\theta + A_2 z^2 \cos 2\theta + A_3 z^3 \cos 3\theta + \dots,$$
$$A_1 z \sin\theta + A_2 z^2 \sin 2\theta + A_3 z^3 \sin 3\theta + \dots;$$

die letzteren convergiren, wie sehr leicht zu sehen, jedesmal, wenn diefs mit der Reihe 1) der Fall ist, und man kann daher sagen: die complexe Reihe 2) convergirt immer unter denselben Bedingungen, unter welchen die reelle Reihe 1) convergent bleibt. So z. B. convergirt die reelle Reihe

$$\tfrac{1}{1} z + \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{4} z^4 + \dots$$

für $1 > z > -1$; dasselbe gilt auch von der complexen Reihe

3) $\tfrac{1}{1} z (\cos\theta + i \sin\theta) + \tfrac{1}{2} z^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \tfrac{1}{3} z^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + \dots$

Für $z = 1$ divergirt die obige Reihe; die complexe Reihe bedarf dann einer besonderen Untersuchung, und zwar findet man aus §. 32, dass sie noch convergirt, wenn θ kein gerades Vielfaches von π ausmacht; für $z > 1$ oder $z < -1$ divergirt die reelle Reihe und ebenso die complexe. Mit diesen einfachen Bemerkungen ist für alle Fälle die Entscheidung gegeben.

Was ferner die Rechnung mit unendlichen complexen Reihen betrifft, so wird man sich leicht überzeugen, dafs sie ganz denselben Regeln unterliegt wie die Behandlung der reellen Reihen, und zwar folgt diefs aus der Bemerkung, dafs jede complexe Reihe als Complex zweier reellen Reihen angesehen werden darf. Man kann demnach zu jedem der in §. 33 enwickelten Sätze ein Correlat aufstellen, welches die Erweiterung desselben auf complexe Reihen ausspricht. So z. B. wird unter der dort gemachten Determination das Product der convergenten reellen Reihen

4) $\begin{cases} a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \\ b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots \end{cases}$

durch die convergente Reihe

5) $a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \dots$

dargestellt; betrachtet man statt dessen die complexen Reihen

6) $\begin{cases} a_0 + a_1 z (\cos\theta + i \sin\theta) + a_2 z^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \dots \\ b_0 + b_1 z (\cos\theta + i \sin\theta) + b_2 z^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \dots \end{cases}$

welche convergiren, wenn hier z denselben Bedingungen wie in No. 4) genügt, so enthält das Product, nach Potenzen von z geordnet, die nämlichen Partialproducte $a_0 b_0$, $a_0 b_1$, $a_1 b_0$ etc. wie No. 5), aber aufserdem noch mit goniometrischen Factoren behaftet. Zerlegt man

das Product in seinen reellen und imaginären Theil, so findet man zwei Reihen, welche rascher als die Reihe 5) convergiren, weil ihre einzelnen Glieder kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe 5) sind; es convergirt also auch die complexe Reihe, welche das Product der complexen Reihen in 6) darstellt. Ähnliche Schlüsse gelten für alle solche Erweiterungen der in §. 33 enthaltenen Theoreme.

Sowie nun früher Summirungen reeller Reihen vorgenommen wurden, so können jetzt auch complexe Reihen summirt werden, indem man sie analogen Betrachtungen wie jene unterwirft. Um diefs zunächst an einem einfachen Beispiele zu zeigen, erinnern wir an die Summenformel für die geometrische Progression

7) $$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

die man auch als das Ergebnifs einer ausgeführten Division ansehen könnte. Da nun, den Lehren des §. 53 zufolge, die Grundoperationen bei complexen Zahlen dieselben wie bei reellen Zahlen sind, so mufs die obige Formel auch für ein complexes x, etwa

$$x = z\,(\cos\theta + i \sin\theta)$$

richtig bleiben; man erhält durch diese Substitution

8) $$1 + z\,(\cos\theta + i\sin\theta) + z^2\,(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots$$
$$\ldots + z^{n-1}\,(\cos \overline{n-1}\theta + i \sin \overline{n-1}\theta)$$
$$= \frac{1 - z^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{1 - z\cos\theta - iz\sin\theta}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner des rechter Hand stehenden Ausdrucks mit

$$1 - z\cos\theta + iz\sin\theta$$

und vereinigt soviel als möglich, so geht derselbe in den folgenden über:

$$\frac{1 - z\cos\theta - z^n\cos n\theta + z^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$
$$+ i\,\frac{z\sin\theta - z^n\sin n\theta + z^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}.$$

Aus der Vergleichung der reellen und imaginären Partie des vorliegenden Ausdruckes mit den reellen und imaginären Theilen der Reihe in 8) fliessen jetzt unmittelbar folgende Reihenformeln:

9) $$1 + z\cos\theta + z^2\cos 2\theta + z^3\cos 3\theta + \ldots + z^{n-1}\cos(n-1)\theta$$
$$= \frac{1 - z\cos\theta - z^n\cos n\theta + z^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

10) $z \sin\theta + z^2 \sin 2\theta + z^3 \sin 3\theta + \ldots + z^{n-1} \sin(n-1)\theta$

$$= \frac{z \sin\theta - z^n \sin n\theta + z^{n+1} \sin(n-1)\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

von deren Richtigkeit man sich auch umgekehrt überzeugen kann, indem man beiderseits mit $1 - 2z\cos\theta + z^2$ multiplicirt und linker Hand jedes doppelte Product zweier goniometrischen Functionen in eine Summe zweier Cosinus oder Sinus zerlegt.

Nehmen wir z als echten Bruch, lassen die Gliederzahl ins Unendliche wachsen und beachten, dafs z^n unter der obigen Voraussetzung die Null zur Grenze hat, so gehen die Formeln 8), 9) und 10) in die folgenden über:

11) $1 + z(\cos\theta + i\sin\theta) + z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots$

$$= \frac{1}{1 - z(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1 - z\cos\theta + iz\sin\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

12) $1 + z\cos\theta + z^2\cos 2\theta + z^3\cos 3\theta + z^4\cos 4\theta + \ldots$

$$= \frac{1 - z\cos\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

13) $z\sin\theta + z^2\sin 2\theta + z^3\sin 3\theta + z^4\sin 4\theta + \ldots$

$$= \frac{z\sin\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

wobei allen drei Formeln die Bedingung

$$1 > z > -1$$

gemeinschaftlich zukommt.

§. 61.

Die Binomialreihe mit complexer Variabelen.

Die Rechnungsoperationen, mittelst deren wir in §. 37 die Summe der Reihe

$$f(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots,$$

$$= (\mu)_0 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + (\mu)_3 x^3 + \ldots$$

bestimmt haben, bezogen sich hauptsächlich auf μ und waren ganz unabhängig von der Frage, ob x reell ist oder nicht; daher läfst sich dasselbe Verfahren auch zur Summirung der complexen Binomialreihe

1) $f(\mu) = (\mu)_0 + (\mu)_1 z(\cos\theta + i\sin\theta) + (\mu)_2 z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots$

benutzen, vorausgesetzt natürlich, dafs dieselbe convergirt. Die fragliche Reihe besteht nun aus den beiden reellen Reihen

$$(\mu)_0 + (\mu)_1 z\cos\theta + (\mu)_2 z^2\cos 2\theta + \ldots,$$

$$(\mu)_1 z\sin\theta + (\mu)_2 z^2\sin 2\theta + \ldots,$$

welche für $z^2 < 1$ gleichzeitig convergiren und für $z^2 > 1$ gleich-

zeitig divergiren; im Falle $z^2 = 1$ ist nach §. 32 zur Convergenz die Bedingung $Lim\,(\mu)_n = 0$ erforderlich und dieser genügt man durch die Annahme $-1 < \mu < +\infty$ (s. §. 23, Formel 2). Den in §. 32 erwähnten Ausnahmefall, wo θ ein Vielfaches von π beträgt, können wir übergehen, weil derselbe auf die Binomialreihe mit reellen Variabelen zurückführen würde.

Aus der Gleichung 1) erhalten wir nach derselben Methode wie in §. 37 für $f(\mu)$ die Eigenschaft

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta)$$

mithin bei allen reellen μ

$$f(\mu) = [f(1)]^\mu,$$

d. i., wenn $f(1)$ mittelst der Gleichung 1) bestimmt wird,

$$f(\mu) = [1 + z\,(\cos\theta + i \sin\theta)]^\mu;$$

demnach gilt die Formel

2) $$[1 + z\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^\mu$$
$$= (\mu)_0 + (\mu)_1\, z\,(\cos\theta + i\sin\theta) + (\mu)_2\, z^2\,(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \dots$$

und zwar unter den Bedingungen

3) $$\begin{cases} \text{entweder } z^2 < 1 \text{ und } \mu \text{ beliebig,} \\ \text{oder } \quad z^2 = 1 \quad - \quad -1 < \mu < \infty. \end{cases}$$

Um eine Vergleichung der beiderseitigen reellen und imaginären Theile vornehmen zu können, bringen wir die Basis der links verzeichneten Potenz auf die Normalform complexer Zahlen, indem wir setzen

$$1 + z\,(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,(\cos\tau + i\sin\tau).$$

Daraus folgt zunächst

4) $$r = \sqrt{1 + 2z\cos\theta + z^2},$$

wo das Wurzelzeichen im absoluten Sinne zu nehmen ist, ferner

$$\tan\tau = \frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta} \quad \text{oder} \quad \tau = \arctan\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta} \pm k\pi$$

worin k eine beliebige gerade Zahl bedeutet; zur Abkürzung sei

5) $$\omega = \arctan\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta}, \quad \text{mithin} \quad \tau = \omega \pm k\pi.$$

Man hat nun mit Rücksicht auf das in §. 53 Gesagte

$$[1 + z\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^\mu = r^\mu\,[\cos\mu\,(\tau + 2h\pi) + i\sin\mu\,(\tau + 2h\pi)]$$
$$= (1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\,[\cos\mu\,(\omega + n\pi) + i\sin\mu\,(\omega + n\pi)]$$

und darin bezeichnet $n = 2h \pm k$ irgend eine positive oder negative gerade Zahl. Endlich führt die Vergleichung der reellen und imaginären Theile zu folgenden zwei Formeln

6) $$(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\mu\,(\omega + n\pi)$$
$$= (\mu)_0 + (\mu)_1\, z\cos\theta + (\mu)_2\, z^2\cos 2\theta + (\mu)_3\, z^3 \cos 3\theta + \dots$$

7) $$(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin\mu(\omega+n\pi)$$
$$=(\mu)_1\, z\sin\theta+(\mu)_2\, z^2\sin 2\theta+(\mu)_3\, z^3\sin 3\theta+\ldots.$$

Der Natur der Sache nach bestehen die linken Seiten dieser Gleichungen aus mehrdeutigen Ausdrücken, während jede der rechts verzeichneten Reihen nur eine Summe besitzt; daher mufs n bestimmte Werthe haben, entweder einen einzigen immer gültigen oder nach einander verschiedene, je nach der Gröfse des z oder θ. (Man kann sich z. B. denken, dafs $n=-2$ oder $=0$ oder $=+2$ zu nehmen wäre, jenachdem z zwischen -1 und $-\frac{1}{2}$ oder zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ oder zwischen $+\frac{1}{2}$ und $+1$ liegt.) Hierüber entscheidet folgende Bemerkung. Die Reihen in No. 6) und 7) schreiten nach Potenzen von z fort, mithin sind ihre Summen stetige Functionen von z innerhalb der Grenzen der Convergenz (§. 31, S. 128), daher müssen auch die linken Seiten der Gleichungen 6) und 7) continuirliche und endliche Functionen von z sein. Was nun den ersten Factor

$$(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}$$

betrifft, so bleibt derselbe bei positiven μ immer endlich und stetig; bei negativen μ würde er unendlich werden, wenn $1+2z\cos\theta+z^2$ den Werth Null erhielte, und dieser Fall läfst sich durch die Annahme $z^2<1$ vermeiden, weil dann immer $1+z^2>2z>2z\cos\theta$ ist. Im zweiten Factor ist unter derselben Voraussetzung ω eine endliche und stetige Function von z, dagegen ändert sich n sprungweise, und daher würden $\cos\mu(\omega+n\pi)$ und $\sin\mu(\omega+n\pi)$ Unterbrechungen der Continuität erleiten, wenn n nacheinander verschiedene Werthe erhielte. Die Continuität der linken Seiten von 6) und 7) erfordert demnach, dafs n immer denselben Werth behält, solange z zwischen -1 und $+1$ bleibt; um diesen einen Werth von n zu finden, genügt irgend eine Specialisirung des z, am einfachsten $z=0$, wodurch $\omega=0$ wird und folgende Gleichungen entstehen

$$\cos\mu n\pi=1,\quad \sin\mu n\pi=0.$$

Bei beliebigen μ können diese Gleichungen nur dann zusammenbestehen, wenn $n=0$ ist; man hat daher

8) $$(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\left(\mu\arctan\frac{z\sin\theta}{1+z\cos\theta}\right)$$
$$=(\mu)_0+(\mu)_1\, z\cos\theta+(\mu)_2\, z^2\cos 2\theta+(\mu)_3\, z^3\cos 3\theta+\ldots,$$

9) $$(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin\left(\mu\arctan\frac{z\sin\theta}{1+z\cos\theta}\right)$$
$$=(\mu)_1\, z\sin\theta+(\mu)_2\, z^2\sin 2\theta+(\mu)_3\, z^3\sin 3\theta+\ldots.$$

Im Falle eines ganzen positiven μ brechen diese Reihen ab und

gelten dann, wie leicht zu sehen ist, ohne alle Beschränkung des z; in jedem anderen Falle mufs z zwischen -1 und $+1$ enthalten sein.

Einige bemerkenswerthe Specialisirungen der Formeln 8) und 9) sind folgende. Für ein ganzes positives $\mu = m$ und $z = 1$ wird

$$\arctan \frac{z \sin \theta}{1 + z \cos \theta} = \arctan (\tan \tfrac{1}{2}\theta)$$

was mit $\frac{1}{2}\theta$ übereinkommt, wenn $\frac{1}{2}\theta$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, mithin θ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich die Formeln

$$10) \quad (2 \cos \tfrac{1}{2}\theta)^m \cos \tfrac{1}{2}m\theta$$
$$= (m)_0 + (m)_1 \cos \theta + (m)_2 \cos 2\theta + (m)_3 \cos 3\theta + \ldots + (m)_m \cos m\theta,$$

$$11) \quad (2 \cos \tfrac{1}{2}\theta)^m \sin \tfrac{1}{2}m\theta$$
$$= (m)_1 \sin \theta + (m)_2 \sin 2\theta + (m)_3 \sin 3\theta + \ldots + (m)_m \sin m\theta.$$

Da beide Seiten dieser Gleichungen ungeändert bleiben, wenn für θ der Reihe nach $2\pi \mp \theta$, $4\pi \mp \theta$ etc. gesetzt wird, so gelten die genannten Gleichungen auch für jedes beliebige θ.

Eine zweite Specialisirung ergiebt sich durch die Annahme $z = -\cos\theta$, wobei wir $0 < \theta < \pi$ voraussetzen, damit z stetig von -1 bis $+1$ gehe; es wird

$$12) \quad \sin^\mu \theta \cos \mu (\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = (\mu)_0 - (\mu)_1 \cos\theta \cos\theta + (\mu)_2 \cos^2\theta \cos 2\theta$$
$$- (\mu)_3 \cos^3\theta \cos 3\theta + \ldots .$$

$$13) \quad \sin^\mu \theta \sin \mu (\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = (\mu)_1 \cos\theta \sin\theta - (\mu)_2 \cos^2\theta \sin 2\theta$$
$$+ (\mu)_3 \cos^3\theta \sin 3\theta - \ldots .$$

$$0 < \theta < \pi.$$

Im Fall μ eine ganze positive Zahl ist, gelten auch diese Formeln für jedes beliebige θ.

Für $\theta = \frac{1}{2}\pi$ erhält man aus No. 8) und 9)

$$(1 + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} \cos (\mu \arctan z) = (\mu)_0 - (\mu)_2 z^2 + (\mu)_4 z^4 - (\mu)_6 z^6 + \ldots .$$
$$(1 + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} \sin (\mu \arctan z) = (\mu)_1 z - (\mu)_3 z^3 + (\mu)_5 z^5 - \ldots .$$
$$-1 < z < +1,$$

oder wenn $\arctan z = u$, mithin $z = \tan u$ gesetzt wird,

$$14) \quad \frac{\cos \mu u}{\cos^\mu u} = (\mu)_0 - (\mu)_2 \tan^2 u + (\mu)_4 \tan^4 u - (\mu)_6 \tan^6 u + \ldots,$$

$$15) \quad \frac{\sin \mu u}{\cos^\mu u} = (\mu)_1 \tan u - (\mu)_3 \tan^3 u + (\mu)_5 \tan^5 u - \ldots .$$

$$-\tfrac{1}{4}\pi < u < +\tfrac{1}{4}\pi.$$

Diese Formeln sind in so fern die Verallgemeinerungen von den Formeln 4) und 5) des §. 44, als hier μ beliebig ist, während θ auf das Intervall $-\frac{1}{4}\pi$ bis $+\frac{1}{4}\pi$ beschränkt bleibt. Auch lassen sich mit den Formeln 14) und 15) genau dieselben Umwandlungen vornehmen,

welche in §. 44 zu den Gleichungen 10), 11), 13) und 14) führten; es gelten daher bei beliebigen μ und für $-\frac{1}{4}\pi < u < +\frac{1}{4}\pi$ folgende vier Gleichungen:

$$16)\quad \cos\mu u = 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\sin^2 u + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 u - \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4}\sin^6 u + \dots,$$

$$17)\quad \cos\mu u = \cos u\left\{1 - \frac{\mu^2-1^2}{1.2}\sin^2 u + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4}\sin^4 u - \dots\dots\right\},$$

$$18)\quad \sin\mu u = \frac{\mu}{1}\sin u - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 u - \dots.$$

$$19)\quad \sin\mu u = \cos u\left\{\frac{\mu}{1}\sin u - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3}\sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 u - \dots\right\}.$$

Die Grenzen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$, innerhalb deren diese Resultate richtig bleiben, lassen sich durch folgende Bemerkung etwas erweitern. Setzt man in No. 16) $\mu = 2\lambda$, $u = \frac{1}{2}v$, so hat man

$$\cos\lambda v = 1 - \frac{(2\lambda)^2}{1.2}\sin^2\tfrac{1}{2}v + \frac{(2\lambda)^2[(2\lambda)^2-2^2]}{1.2.3.4}\sin^4\tfrac{1}{2}v - \dots$$
$$= 1 - \frac{\lambda^2}{1.2}(2\sin\tfrac{1}{2}v)^2 + \frac{\lambda^2(\lambda^2-1^2)}{1.2.3.4}(2\sin\tfrac{1}{2}v)^4 - \frac{\lambda^2(\lambda^2-1^2)(\lambda^2-2^2)}{1.2.3.4.5.6}(2\sin\tfrac{1}{2}v)^6 + \dots$$

und zwar gilt diese Gleichung unter der Bedingung $-\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}v < +\frac{1}{4}\pi$ d. h. $-\frac{1}{2}\pi < v < +\frac{1}{2}\pi$. Ferner ist

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}v = 1 - \cos v = 1 - \sqrt{1-\sin^2 v},$$

wobei das Wurzelzeichen im absoluten Sinne genommen werden mufs, weil der Cosinus eines zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogens v positiv ist; entwickelt man noch $\sqrt{1-\sin^2 v}$ nach dem binomischen Satze, so wird

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}v = \frac{\sin^2 v}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin^4 v}{4} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^6 v}{6} + \dots$$

oder

$$(2\sin\tfrac{1}{2}v)^2 = \sin^2 v + \frac{1}{2}\frac{\sin^4 v}{2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^6 v}{3} + \dots$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung nach einander auf die zweite, dritte u. s. w. Potenz erhebt, gelangt man zu Reihen für $(2\sin\frac{1}{2}v)^4$, $(2\sin\frac{1}{2}v)^6$ etc. und es ist dann

$$\begin{aligned}\cos\lambda v = 1 &- \frac{\lambda^2}{1\,.\,2}\left\{\sin^2 v + \tfrac{1}{4}\sin^4 v + \tfrac{1}{8}\sin^6 v + \dots\right\}\\ &+ \frac{\lambda^2(\lambda^2-1^2)}{1\,.\,2}\left\{\sin^4 v + \tfrac{1}{2}\sin^6 v + \dots\right\}\\ &- \frac{\lambda^2(\lambda^2-1^2)(\lambda^2-2^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left\{\sin^6 v + \dots\right\}\\ &+ \dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Diese Doppelreihe genügt den Bedingungen, unter welchen die Anordnung nach Verticalcolonnen vorgenommen werden darf; man erhält (immer für $-\frac{1}{2}\pi < v < +\frac{1}{2}\pi$)

$$20)\qquad \cos\lambda v = 1 - \frac{\lambda^2}{1\,.\,2}\sin^2 v + \frac{\lambda^2(\lambda^2-2^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\sin^4 v - \dots,$$

und zwar mufs dieses Resultat mit No. 16) übereinstimmen, weil es im Falle $-\frac{1}{4}\pi < v < +\frac{1}{4}\pi$ nicht von Dem verschieden sein kann, was die Gleichung 16) für $\mu = \lambda$ und $u = v$ geben würde. Man gelangt also formell zu nichts Neuem, wohl aber zeigt sich, dafs die Gleichung 20) für $-\frac{1}{2}\pi < v < +\frac{1}{2}\pi$, oder die Gleichung 16) für $-\frac{1}{2}\pi < u < +\frac{1}{2}\pi$ gültig bleibt. Ganz ähnliche Betrachtungen sind auf die Gleichungen 17), 18), 19) anwendbar, und man kann demnach die Formel 16) bis 19) für alle zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden u in Anspruch nehmen*).

Noch wollen wir ein paar bemerkenswerthe Folgerungen aus den Gleichungen 16) und 19) erwähnen. Die erste dieser Gleichungen läfst sich folgendermaafsen darstellen

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos\mu u}{\mu^2} &= \frac{\sin^2 u}{2} + \frac{2}{3}\left(1-\frac{\mu^2}{2^2}\right)\frac{\sin^4 u}{4}\\ &\quad + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\left(1-\frac{\mu^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{4^2}\right)\frac{\sin^6 u}{6} + \dots\end{aligned}$$

---

*) Eine fernere Erweiterung des Gültigkeitsintervalles ist übrigens nicht möglich. Liegt z. B. v zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, so ist

$$\begin{aligned}2\sin^2\tfrac{1}{2}v &= 1 + \sqrt{1-\sin^2 v}\\ &= 2 - \frac{\sin^2 v}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin^4 v}{4} - \dots\dots,\end{aligned}$$

und nun wird das Resultat ein ganz anderes. Diefs sieht man auch leicht a posteriori. Die Reihe in No. 16) bleibt nämlich dieselbe für $u = w$ und für $u = \pi - w$, dagegen sind $\cos\mu w$ und $\cos\mu(\pi - w)$ verschieden (wofern μ nicht eine gerade Zahl ist), mithin hört die Gültigkeit der Gleichung 16) auf, sobald u den ersten Quadranten überschreitet.

und wenn μ als echter Bruch vorausgesetzt wird, so beträgt das im k^{ten} Gliede vorkommende Product

$$\left(1-\frac{\mu^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{6^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu^2}{(2k)^2}\right)$$

weniger als die Einheit, aber mehr als das unendliche Product

$$\left(1-\frac{\mu^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{6^2}\right)\cdots=\frac{\sin\frac{1}{2}\mu\pi}{\frac{1}{2}\mu\pi};$$

diefs giebt folgende zwei Ungleichungen

$$\frac{1-\cos\mu u}{\mu^2}<\frac{\sin^2 u}{2}+\frac{2}{3}\frac{\sin^4 u}{4}+\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\frac{\sin^6 u}{6}+\cdots$$

$$\frac{1-\cos\mu u}{\mu^2}>\frac{\sin\frac{1}{2}\mu\pi}{\frac{1}{2}\mu\pi}\left\{\frac{\sin^2 u}{2}+\frac{2}{3}\frac{\sin^4 u}{4}+\cdots\right\}.$$

Indem man $1-\cos\mu u$ durch $2\sin^2\frac{1}{2}\mu u$ ersetzt; zieht man hieraus

$$\frac{u^2}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\mu u}{\frac{1}{2}\mu u}\right)^2$$

$$<\frac{\sin^2 u}{2}+\frac{2}{3}\frac{\sin^4 u}{4}+\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\frac{\sin^6 u}{6}+\cdots<$$

$$\frac{u^2}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\mu u}{\frac{1}{2}\mu u}\right)^2:\frac{\sin\frac{1}{2}\mu\pi}{\frac{1}{2}\mu\pi};$$

durch Übergang zur Grenze für unendlich abnehmende μ verwandelt sich diese Ungleichung in die Gleichung

$$21)\qquad \frac{u^2}{2}=\frac{\sin^2 u}{2}+\frac{2}{3}\frac{\sin^4 u}{4}+\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\frac{\sin^6 u}{6}+\cdots\cdot,$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi<u<+\tfrac{1}{2}\pi,$$

oder

$$22)\qquad (\arcsin x)^2=\frac{x^2}{1}+\frac{2}{3}\frac{x^4}{2}+\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\frac{x^6}{3}+\cdots,$$

wobei $\sin u = x$ gesetzt wurde.

Die Gleichung 19) läfst sich folgendermaafsen darstellen:

$$u\frac{\sin\mu u}{\mu u}=\cos u\sin u\left\{1+\frac{2}{3}\left(1-\frac{\mu^2}{2^2}\right)\sin^2 u\right.$$

$$\left.+\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\left(1-\frac{\mu^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{4^2}\right)\sin^4 u+\cdots\right\}$$

und kann im Übrigen wie vorhin behandelt werden; durch Übergang zur Grenze für verschwindende μ erhält man

$$23)\qquad u=\cos u\sin u\left\{1+\frac{2}{3}\sin^2 u+\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\sin^4 u+\cdots\right\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi<u<+\tfrac{1}{2}\pi,$$

oder auch

$$24)\quad u=\frac{\tan u}{1+\tan^2 u}\left\{1+\frac{2}{3}\frac{\tan^2 u}{1+\tan^2 u}+\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\left(\frac{\tan^2 u}{1+\tan^2 u}\right)^2+\cdots\right\}.$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi<u<+\tfrac{1}{2}\pi.$$

Setzt man $tan\, u = x$, woraus $u = arctan\, x$ folgt, so gelangt man zu einer für jedes endliche x geltenden Entwickelung von $arctan\, x$, nämlich

$$25)\quad arctan\, x = \frac{x}{1+x^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \ldots\right\}.$$

Hierin liegt wieder ein Mittel zur Berechnung der Zahl π; durch Anwendung der Formel

$$\tfrac{1}{4}\pi = 5\, arctan\, \tfrac{1}{7} + 2\, arctan\, \tfrac{3}{79}$$

ergiebt sich z. B.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{7}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{2}{100} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \ldots\right\}$$
$$+ \frac{7584}{100000}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{144}{100000} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \ldots\right\}$$

und hier braucht man nur wenig Reihenglieder, um eine bedeutende Genauigkeit zu erreichen.

Die Gleichungen 17) und 18) gestatten eine ganz ähnliche Behandlung, doch gelangt man dabei zu keinen neuen Resultaten.

§. 62.

Die Exponentialreihe mit complexer Variabelen.

Wie in §. 41 benutzen wir die Formel

$$Lim\left\{\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega\right\} = e, \quad \omega = \infty,$$

um von der Binomialreihe zur Exponentialreihe zu gelangen, wir gehen dabei von den Gleichungen 8) und 9) des vorigen Paragraphen aus und denken uns der Einfachheit wegen μ als ganz und positiv. Ersetzt man in den genannten Gleichungen μ durch m, z durch $\frac{z}{m}$, und theilt die $m+1$ vorhandenen Glieder in zwei Gruppen von k und $m+1-k$ Gliedern, so kann man schreiben

$$1)\qquad \left(1 + 2\frac{z}{m}\cos\theta + \frac{z^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m} \cos\left(m\, arctan\, \frac{z \sin\theta}{m + z\cos\theta}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{1} z\cos\theta + \frac{1-\frac{1}{m}}{1\,.\,2} z^2\cos 2\theta + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3} z^3 \cos 3\theta + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(k-1)} z^{k-1}\cos(k-1)\theta + R',$$

$$R' = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,k}\,z^k$$

$$\times\left\{\cos k\theta + \frac{1-\frac{k}{m}}{k+1}\,z\cos(k+1)\theta + \ldots\right\}$$

Denken wir uns z beliebig gewählt, dann $k > z$ und $m > k$ genommen, so liegt der absolute Werth der zuletzt eingeklammerten Reihe zwischen

$$+\left\{1+\left[\frac{z}{k}\right]+\left[\frac{z}{k}\right]^2+\left[\frac{z}{k}\right]^3+\ldots \text{ in inf.}\right\}$$

und

$$-\left\{1+\left[\frac{z}{k}\right]+\left[\frac{z}{k}\right]^2+\left[\frac{z}{k}\right]^3+\ldots \text{ in inf.}\right\}$$

wo $\left[\frac{z}{k}\right]$ den absoluten Werth von $\frac{z}{k}$ bezeichnet; es ist daher, wenn unter ϱ' ein nicht näher angebbarer positiver oder negativer echter Bruch verstanden wird,

$$2)\qquad R' = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,k}\;\frac{\varrho' z^k}{1-\left[\frac{z}{k}\right]},$$

$$m > k > z, \quad -1 < \varrho' < +1.$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen erhält man aus No. 9) des vorigen Paragraphen

$$3)\qquad \left(1+2\frac{z}{m}\cos\theta+\frac{z^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m}\sin\left(m\arctan\frac{z\sin\theta}{m+z\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{1}z\sin\theta+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\,.\,2}z^2\sin 2\theta+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3\sin 3\theta+\ldots.$$

$$\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,(k-1)}z^{k-1}\sin(k-1)\theta+R'',$$

und darin bestimmt sich der Rest durch die Formel

$$4)\qquad R'' = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,k}\;\frac{\varrho'' z^k}{1-\left[\frac{z}{k}\right]},$$

$$m > k > z, \quad -1 < \varrho'' < +1.$$

Betrachten wir k vorläufig als constant, m dagegen als unendlich wachsende Zahl, so nimmt auch der Ausdruck

$$\frac{m^2}{2\,mz\cos\theta + z^2} = \frac{m}{2\,z\cos\theta + \frac{z^2}{m}}$$

ins Unendliche zu und mag deſshalb mit ω bezeichnet werden, woraus

$$2\,\frac{z}{m}\cos\theta + \frac{z^2}{m^2} = \frac{1}{\omega}$$

folgt; hiernach ist

$$\left(1 + 2\,\frac{z}{m}\cos\theta + \frac{z^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m} = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}m} = \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]^{\frac{m}{2\omega}}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]^{z\cos\theta + \frac{z^2}{2m}}$$

und durch Übergang zur Grenze für gleichzeitig unendlich wachsende ω und m

5) $$Lim\left\{\left(1 + 2\,\frac{z}{m}\cos\theta + \frac{z^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m}\right\} = e^{z\cos\theta}.$$

Zur Abkürzung sei ferner

$$\arctan\frac{z\sin\theta}{m + z\cos\theta} = \vartheta, \quad \text{mithin} \quad \tan\vartheta = \frac{z\sin\theta}{m + z\cos\theta},$$

dann convergirt ϑ gegen die Null, wenn m unendlich wird, und man hat

$$m\arctan\frac{z\sin\theta}{m + z\cos\theta} = m\vartheta = \frac{\vartheta}{\tan\vartheta}\,.\,m\tan\vartheta$$

$$= \frac{\cos\vartheta}{\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}}\,.\,\frac{z\sin\theta}{1 + \frac{z}{m}\cos\theta}$$

folglich

6) $$Lim\left(m\arctan\frac{z\sin\theta}{m + z\cos\theta}\right) = z\sin\theta.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 5) und 6) und unter Beachtung des Umstandes, daſs

$$Lim\,\frac{1}{m} = Lim\,\frac{2}{m} = \ldots . = Lim\,\frac{k-1}{m} = 0$$

ist, zieht man aus den Gleichungen 1) bis 4) die neuen Resultate

$$e^{z\cos\theta}\cos(z\sin\theta) = 1 + \frac{1}{1}\,z\cos\theta + \frac{1}{1\,.\,2}\,z^2\cos 2\theta + \ldots .$$

$$\ldots + \frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,(k-1)}\,z^{k-1}\cos(k-1)\theta + \frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,k}\,\frac{\varrho''\,k^k}{1 - \left[\frac{z}{k}\right]},$$

$$e^{z\cos\theta}\sin(z\sin\theta) = \frac{1}{1}z\sin\theta + \frac{1}{1\,.\,2}z^2\sin 2\theta + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{1}{1\,.\,2\ldots(k-1)}z^{k-1}\sin(k-1)\theta + \frac{1}{1\,.\,2\ldots k}\,\frac{\varrho'' z^k}{1-\left[\frac{z}{k}\right]},$$

$$k > z,\quad -1 < \varrho' < +1,\quad -1 < \varrho'' < +1.$$

Bringt man die Reste auf die linke Seite und läfst k ins Unendliche wachsen, so gelangt man zu den folgenden für jedes endliche z gültigen Formeln

7)
$$e^{z\cos\theta}\cos(z\sin\theta)$$
$$= 1 + \frac{z}{1}\cos\theta + \frac{z^2}{1\,.\,2}\cos 2\theta + \frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3}\cos 3\theta + \ldots.$$

8)
$$e^{z\cos\theta}\sin(z\sin\theta)$$
$$= \frac{z}{1}\sin\theta + \frac{z^2}{1\,.\,2}\sin 2\theta + \frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3}\sin 3\theta + \ldots.$$

Diese lassen sich wieder zu einer einzigen Gleichung zusammenziehen, nämlich

$$e^{z\cos\theta}[\cos(z\sin\theta) + i\sin(z\sin\theta)]$$
$$= 1 + \frac{z(\cos\theta + i\sin\theta)}{1} + \frac{[z(\cos\theta + i\sin\theta)]^2}{1\,.\,2} + \ldots.$$

oder, wenn $z\cos\theta = x$, $z\sin\theta = y$ gesetzt wird,

9)
$$e^{x+iy} = 1 + \frac{x+iy}{1} + \frac{(x+iy)^2}{1\,.\,2} + \ldots.$$

und es liegt hierin der Satz, dafs die Exponentialreihe für beliebige complexe Variabele gilt. Man kann dieses Resultat auch direct erhalten, wenn man die Summe der Reihe mit $f(x+iy)$ bezeichnet und die Natur der Function f mittelst des auf S. 181 angewendeten Verfahrens bestimmt.

In dem speciellen Falle $\theta = \frac{1}{2}\pi$ führen die Gleichungen 7) und 8) zu den schon bekannten Entwickelungen von $\cos z$ und $\sin z$.

§. 63.

Die Logarithmenreihe mit complexer Variabelen.

Um den Übergang von der Binomialreihe zur Logarithmenreihe auf ähnliche Weise wie in §. 42 bewerkstelligen zu können, setzen wir wie in §. 61

1)
$$\omega = \arctan\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta}$$

und geben den Gleichungen 8) und 9) folgende Formen

$$2) \qquad \frac{(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\mu\omega-1}{\mu}$$

$$=\tfrac{1}{1}z\cos\theta+\frac{\mu-1}{1.2}z^2\cos 2\theta+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}z^3\cos 3\theta+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{k-2})}{1.2\ldots(k-1)}z^{k-1}\cos(k-1)\theta+R',$$

$$3) \qquad (1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cdot\frac{\sin\mu\omega}{\mu\omega}\,\omega$$

$$=\tfrac{1}{1}z\sin\theta+\frac{\mu-1}{1.2}z^2\sin 2\theta+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}z^3\sin 3\theta+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{k-2})}{1.2\ldots.(k-1)}z^{k-1}\sin(k-1)\theta+R''.$$

Was zuerst die Reste R' und R'' betrifft, so ist

$$R'=\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{k-1})}{1.2\ldots k}z^{k-1}\Big[\cos k\theta-\frac{k-\mu}{k+1}z\cos(k+1)\theta$$
$$+\frac{(k-\mu)(k+1-\mu)}{(k+1)(k+2)}z^2\cos(k+2)\theta-\ldots\Big];$$

unter der Voraussetzung eines positiven echt gebrochenen μ convergirt die eingeklammerte Reihe sowohl für $z^2<1$ als auch für $z^2=+1$, wofern im letzteren Falle θ kein Vielfaches von π ausmacht, mithin ist bei dieser Annahme die Summe jener Reihe eine endliche Gröfse, welche S' heifsen möge, also

$$4) \qquad R'=\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{k-1})}{1.2\ldots.k}z^{k-1}S'.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$5) \qquad R''=\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{k-1})}{1.2\ldots k}z^{k-1}S'',$$

wo S'' wieder die Summe einer convergirenden Reihe bedeutet.

Wegen des nachherigen Überganges zur Grenze für verschwindende μ machen wir ferner auf der linken Seite der Gleichung 2) Gebrauch von der Formel $\cos\mu\omega=1-2\sin^2\frac{1}{2}\mu\omega$ und erhalten

$$\frac{(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\mu\omega-1}{\mu}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}-1}{\frac{1}{2}\mu}-(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\mu\omega}{\frac{1}{2}\mu\omega}\,\omega\sin\tfrac{1}{2}\mu\omega;$$

da $\frac{1}{2}\mu$ und $\frac{1}{2}\mu\omega$ gleichzeitig mit μ gegen die Null convergiren, so gelangen wir zu dem Resultate

$$6) \qquad Lim\,\frac{(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\mu\omega-1}{\mu}=\tfrac{1}{2}l(1+2z\cos\theta+z^2).$$

Ebenso findet sich für die linke Seite in No. 3)

$$7)\quad Lim\,\frac{(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin\mu\omega}{\mu}=\omega=\arctan\frac{z\sin\theta}{1+z\cos\theta},$$

und nunmehr bietet der Übergang zur Grenze für verschwindende μ keine Schwierigkeit. Läfst man vorläufig k ungeändert und nennt σ' und σ'' die jedenfalls endlichen Grenzwerthe von S' und S'', so ergeben sich aus No. 2) und 3) die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}l(1+2z\cos\theta+z^2)=\tfrac{1}{1}z\cos\theta-\tfrac{1}{2}z^2\cos 2\theta+\tfrac{1}{3}z^3\cos 3\theta-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k\frac{1}{k-1}z^{k-1}\cos(k-1)\theta+(-1)^{k+1}\frac{\sigma'}{k}z^k,$$

$$\arctan\frac{z\sin\theta}{1+z\cos\theta}=\tfrac{1}{1}z\sin\theta-\tfrac{1}{2}z^2\sin 2\theta+\tfrac{1}{3}z^3\sin 3\theta-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k\frac{1}{k-1}z^{k-1}\sin(k-1)\theta+(-1)^{k+1}\frac{\sigma''}{k}z^k.$$

Hieraus folgen wieder unendliche Reihen, wenn man die Reste auf die linke Seite schafft und nachher k ins Unendliche wachsen läfst; es wird nämlich

$$8)\quad \tfrac{1}{2}l(1+2z\cos\theta+z^2)=\tfrac{1}{1}z\cos\theta-\tfrac{1}{2}z^2\cos 2\theta+\tfrac{1}{3}z^3\cos 3\theta-\ldots$$

$$9)\quad \arctan\frac{z\sin\theta}{1+z\cos\theta}=\tfrac{1}{1}z\sin\theta-\tfrac{1}{2}z^2\sin 2\theta+\tfrac{1}{3}z^3\sin 3\theta-\ldots,$$
$$-1\leqq z\leqq+1,$$

wobei nur für den Fall $z^2=1$ zu beachten ist, dafs θ kein Vielfaches von π sein darf.

Die Specialisirung $z=-\cos\theta$ giebt

$$10)\quad -\tfrac{1}{2}l(\sin^2\theta)=\tfrac{1}{1}\cos\theta\cos\theta+\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\cos 2\theta+\tfrac{1}{3}\cos^3\theta\cos 3\theta+\ldots;$$
$$11)\quad -\arctan(\cot\theta)=\tfrac{1}{1}\cos\theta\sin\theta+\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\sin 2\theta+\tfrac{1}{3}\cos^3\theta\sin 3\theta+\ldots$$

Hier ist zu bemerken, dafs im Allgemeinen $\frac{1}{2}l(\sin^2\theta)$ nicht durch $l\sin\theta$ ersetzt werden darf, weil überhaupt die Functionen $\frac{1}{2}l(x^2)$ und lx nur für positive, nicht aber für negative x identisch sind; beschränkt man dagegen θ auf das Intervall $\theta=0$ bis $\theta=\pi$, so ist jene Substitution erlaubt. Ebenso kann $\arctan(\cot\theta)$ im Allgemeinen nicht $=\arctan[\tan(\frac{1}{2}\pi-\theta)]=\frac{1}{2}\pi-\theta$ gesetzt werden, denn die erste Function ist periodisch wie $\cot\theta$, während die zweite keine Periodicität besitzt.

Für $z=1$ erhält man aus den Gleichungen 8) und 9)

$$12)\quad l2+\tfrac{1}{2}l(\cos^2\tfrac{1}{2}\theta)$$
$$=\tfrac{1}{1}\cos\theta-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta+\tfrac{1}{3}\cos 3\theta-\tfrac{1}{4}\cos 4\theta+\ldots$$

$$13)\quad \arctan(\tan\tfrac{1}{2}\theta)$$
$$=\tfrac{1}{1}\sin\theta-\tfrac{1}{2}\sin 2\theta+\tfrac{1}{3}\sin 3\theta-\tfrac{1}{4}\sin 4\theta+\ldots,$$

oder specieller, wenn θ auf das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ beschränkt wird,

14) $$l2 + l\cos\tfrac{1}{2}\theta$$
$$= \tfrac{1}{1}\cos\theta - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{1}{3}\cos 3\theta - \tfrac{1}{4}\cos 4\theta + \ldots,$$

15) $$\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{1}\sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta + \ldots,$$
$$-\pi < \theta < +\pi.$$

Im Falle $z = -1$ findet man Dasselbe, als wenn man $\pi - \theta$ an die Stelle von θ treten läſst, nämlich

16) $$l2 + l\sin\tfrac{1}{2}\theta$$
$$= -\tfrac{1}{1}\cos\theta - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \tfrac{1}{3}\cos 3\theta - \tfrac{1}{4}\cos 4\theta - \ldots,$$

17) $$\tfrac{1}{2}(\pi - \theta) = \tfrac{1}{1}\sin\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\theta + \ldots$$
$$0 < \theta < 2\pi;$$

diese Gleichungen lassen sich wieder mit den vorigen durch Addition oder Subtraction verbinden, wenn man θ auf das gemeinschaftliche Gültigkeitsintervall $0 < \theta < \pi$ einschränkt.

§. 64.

Die complexen Producte.

Durch vollständige Entwickelung eines Productes von der Form
$$(1 + \alpha_1 x)(1 + \alpha_2 x)(1 + \alpha_3 x)\ldots$$
gelangt man immer zu einer Potenzenreihe
$$1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots,$$
deren Coefficienten einem bekannten combinatorischen Gesetze gehorchen; es ist nämlich
$$\begin{aligned}
C_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots\\
C_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \ldots\\
&\qquad + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots\\
&\qquad\qquad + \alpha_3\alpha_4 + \ldots\\
&\qquad\qquad\qquad + \ldots
\end{aligned}$$
u. s. w.

Demzufolge hat man z. B.

1) $$\left(1 + \frac{x}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^2x^2}\right)\left(1 + \frac{x}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$
$$= 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^2 + C_4 x^4 + \ldots$$

und für den ersten Coefficienten
$$C_1 = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right)$$
d. i. nach Formel 19) in §. 49, wenn das Product ins Unendliche fortgeht,
$$C_1 = \tfrac{1}{6}.$$

Auch die übrigen Coefficienten sind leicht zu bestimmen; setzt man nämlich in No. 1) $x = -z^2$ und multiplicirt beiderseits mit z, so erhält man

$$z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$= z - C_1 z^3 + C_2 z^5 - C_3 z^7 + \cdots$$

und hier ist die linke Seite identisch mit $\sin z$, folglich mufs die rechte Seite mit der Sinusreihe übereinstimmen, woraus sich die Werthe ergeben

$$C_1 = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}, \quad C_2 = \frac{1}{1\,.\,2\ldots 5}, \quad C_3 = \frac{1}{1\,.\,2\ldots 7}, \text{ etc.}$$

Die Gleichung 1) lautet hiernach

$$2)\qquad \left(1+\frac{x}{1^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^2}{1\,.\,2\ldots 5} + \frac{x^3}{1\,.\,2\ldots 7} + \cdots;$$

sie gilt ebensowohl für reelle als für complexe x, weil die Multiplication reeller und complexer Factoren nach einer und derselben Regel erfolgt.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten in dem Falle, wo

$$\alpha_1 = \frac{4}{1^2\pi^2}, \quad \alpha_2 = \frac{4}{3^2\pi^2}, \quad \alpha_3 = \frac{4}{5^2\pi^2}, \quad \cdots$$

genommen wird; man erhält nämlich

$$3)\qquad \left(1+\frac{4x}{1^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x}{3^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{1\,.\,2} + \frac{x^2}{1\,.\,2\ldots 4} + \frac{x^3}{1\,.\,2\ldots 6} + \cdots$$

Für $x = v^2$ gehen die Gleichungen 2) und 3) in die folgenden über:

$$\left(1+\frac{v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$= \frac{e^v - e^{-v}}{2v},$$

$$\left(1+\frac{4v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{4v^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{4v^2}{5^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{4v^2}{7^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$= \frac{e^v + e^{-v}}{2},$$

welche mit denen übereinstimmen, welche man aus

$$4)\qquad \sin z = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots,$$

$$5)\qquad \cos z = \left(1-\frac{4z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

für $z = iv$ erhält. In der That sind die vorstehenden Formeln nicht wesentlich von den Gleichungen 2) und 3) verschieden und sie gelten daher wie jene auch für complexe Variabele.

Um nun die allgemeinere Substitution $z = u + iv$ auszuführen, geben wir der Gleichung 4) die Form

$$l\,sin\,z$$
$$= lz + l\left(\frac{1\pi - z}{1\pi}\right) + l\left(\frac{1\pi + z}{1\pi}\right) + l\left(\frac{2\pi - z}{2\pi}\right) + l\left(\frac{2\pi + z}{2\pi}\right)$$
$$+ l\left(\frac{3\pi - z}{3\pi}\right) + l\left(\frac{3\pi + z}{3\pi}\right) + \cdots$$

und haben

6) $$l\,sin\,(u + iv)$$
$$= l(u + iv) + l\left(\frac{1\pi - u}{1\pi} - i\frac{v}{1\pi}\right) + l\left(\frac{1\pi + u}{1\pi} + i\frac{v}{1\pi}\right)$$
$$+ l\left(\frac{2\pi - u}{2\pi} - i\frac{v}{2\pi}\right) + l\left(\frac{2\pi + u}{2\pi} + i\frac{v}{2\pi}\right)$$
$$+ l\left(\frac{3\pi - u}{3\pi} - i\frac{v}{3\pi}\right) + l\left(\frac{3\pi + u}{3\pi} + i\frac{v}{3\pi}\right)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Linker Hand ist

$$sin\,(u + iv) = sin\,u\,.\,\frac{e^v + e^{-v}}{2} + i\,cos\,u\,.\,\frac{e^v - e^{-v}}{2}$$

mithin, wenn man die Logarithmen nimmt und die Formel

7) $$l(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}l(\xi^2 + \eta^2) + i\left(arctan\frac{\eta}{\xi} + k\pi\right)$$

anwendet,

8) $$l\,sin\,(u + iv)$$
$$= \tfrac{1}{2}l\left(\frac{e^{2v} + e^{-2v}}{4} - \frac{cos\,2u}{2}\right) + i\left\{arctan\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\,cot\,u\right) + k\pi\right\}.$$

Rechter Hand hat man zuerst die Formel 7) für $\xi = u$, $\eta = v$ anzuwenden; ferner ergiebt sich für irgend ein ganzes positives n

$$l\left(\frac{n\pi - u}{n\pi} - i\frac{v}{n\pi}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}l\left(\frac{(n\pi - u)^2 + v^2}{n^2\pi^2}\right) - i\left\{arctan\frac{v}{n\pi - u} + k\pi\right\},$$
$$l\left(\frac{n\pi + u}{n\pi} + i\frac{v}{n\pi}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}l\left(\frac{(n\pi + u)^2 + v^2}{n^2\pi^2}\right) + i\left\{arctan\frac{v}{n\pi + u} + k\pi\right\},$$

und nach allen diesen Substitutionen wird aus No. 6)

$$\frac{1}{2}\, l\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}-\frac{\cos 2u}{2}\right)+i\left\{\arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\cot u\right)+m\pi\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, l(u^2+v^2)+i\arctan\frac{v}{u}$$

$$+\tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{(1\pi-u)^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)-i\arctan\frac{v}{1\pi-u}$$

$$+\tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{(1\pi+u)^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)+i\arctan\frac{v}{1\pi+u}$$

$$+\tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{(2\pi-u)^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)-i\arctan\frac{v}{2\pi-u}$$

$$+\tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{(2\pi+u)^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)+i\arctan\frac{v}{2\pi+u}$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Darin bedeutet m eine ganze Zahl, welche aus der Zusammenfassung der verschiedenen k entsteht. Sie ist leicht durch die Bemerkung zu bestimmen, dafs man für $v=0$ auf die Gleichung 4) zurückkommen mufs; diefs giebt $m=0$. Vergleicht man schliefslich die reellen und imaginären Theile, so gelangt man zu folgenden Resultaten:

9) $$\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}-\frac{\cos 2u}{2}$$

$$=(u^2+v^2)\left(\frac{(1\pi-u)^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(\frac{(1\pi+u)^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)$$

$$\left(\frac{(2\pi-u)^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)\left(\frac{(2\pi+u)^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots,$$

10) $$\arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\cot u\right)$$

$$=\arctan\frac{v}{u}-\arctan\frac{v}{1\pi-u}+\arctan\frac{v}{1\pi+u}$$

$$-\arctan\frac{v}{2\pi-u}+\arctan\frac{v}{2\pi+u}$$

$$-\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Eine ganz ähnliche Transformation kann mit der Gleichung 5) oder mit der, nicht wesentlich von ihr verschiedenen

$$l\cos z$$

$$=l\left(1-\frac{2z}{1\pi}\right)+l\left(1+\frac{2z}{2\pi}\right)+l\left(1-\frac{2z}{3\pi}\right)+l\left(1+\frac{2z}{3\pi}\right)+\cdots,$$

vorgenommen werden, indem man $z=u+iv$ setzt und schliefslich die reellen und imaginären Theile vergleicht; bei der Leichtigkeit der Rechnung wird die Angabe der Endresultate genügen, nämlich

$$11)\quad \frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}+\frac{\cos 2u}{2}$$

$$=\left(\frac{(1\pi-2u)^2+4v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(\frac{(1\pi+2u)^2+4v^2}{1^2\pi^2}\right)$$
$$\left(\frac{(3\pi-2u)^2+4v^2}{3^2\pi^2}\right)\left(\frac{(3\pi+2u)^2+4v^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots,$$

$$12)\quad \arctan\left(\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\tan u\right)$$

$$=\arctan\frac{2v}{1\pi-2u}-\arctan\frac{2v}{1\pi+2u}+\arctan\frac{2v}{3\pi-2u}$$
$$-\arctan\frac{2v}{3\pi+2u}+\cdots.$$

Noch wollen wir bemerken, dafs der specielle Fall $v=u$ nicht ohne Interesse ist. Zwei aufeinander folgende Factoren in No. 9) sind nämlich

$$\left(\frac{(n\pi-u)^2+v^2}{n^2\pi^2}\right)\left(\frac{(n\pi+u)^2+v^2}{n^2\pi^2}\right)$$

und geben für $v=u$

$$\left(\frac{n^2\pi^2+2u^2-2n\pi u}{n^2\pi^2}\right)\left(\frac{n^2\pi^2+2u^2+2n\pi u}{n^2\pi^2}\right)$$
$$=\frac{(n^2\pi^2+2u^2)^2-(2n\pi u)^2}{n^4\pi^4}=1+\frac{2^2u^4}{n^4\pi^4},$$

mithin wird aus No. 9)

$$13)\quad \frac{e^{2u}+e^{-2u}}{4}-\frac{\cos 2u}{2}$$

$$=2u^2\left(1+\frac{2^2u^4}{1^4\pi^4}\right)\left(1+\frac{2^2u^4}{2^4\pi^4}\right)\left(1+\frac{2^2u^4}{3^4\pi^4}\right)\cdots.$$

Die Formel 11) liefert bei gleicher Behandlung

$$14)\quad \frac{e^{2u}+e^{-2u}}{4}+\frac{\cos 2u}{2}$$

$$=\left(1+\frac{2^4u^4}{1^4\pi^4}\right)\left(1+\frac{2^4u^4}{3^4\pi^4}\right)\left(1+\frac{2^4u^4}{5^4\pi^4}\right)\cdots.$$

Durch weitere Specialisirungen (z. B. $u=\frac{1}{2}\pi$, $u=\frac{1}{4}\pi$ u. dergl.) erhält man noch einige bemerkenswerthe Resultate, welche für die Exponentialgröfse ungefähr dasselbe sind wie bei den goniometrischen Functionen das unendliche Product für die Ludolph'sche Zahl*).

*) Die strenge Herleitung der Resultate dieses Capitels ist zuerst von Cauchy gegeben worden. (*Cours d'Analyse algèbr.* chap. IX.)

Capitel XII.

Die Kettenbrüche.

§. 65.

Eigenschaften der Näherungsbrüche.

Ein Kettenbruch entsteht, wenn man mehrere beliebige Brüche so miteinander in Verbindung bringt, daſs jeder folgende einen Bestandtheil von dem Nenner des vorhergehenden Bruches ausmacht, wie in den folgenden Ausdrücken:

$$\frac{2}{5+\frac{3}{4}},\quad \frac{2}{5+\frac{3}{4-\frac{1}{7}}},\quad \frac{2}{5+\frac{3}{4-\frac{1}{7+\frac{8}{9}}}}$$

Das allgemeine Schema eines Kettenbruches ist hiernach

$$\frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2+\frac{b_3}{a_3+\frac{b_4}{a_4+\cdots}}}}$$

wobei a_1, a_2, a_3, ... b_1, b_2, b_3, ... positive oder negative, ganze oder selbst gebrochene Gröſsen bedeuten können. Die einzelnen Brüche

$$\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\ \frac{b_4}{a_4},\ \ldots$$

welche in dem Kettenbruche vorzukommen scheinen, nennt man die Glieder desselben und den Kettenbruch selbst einen ein-, zwei-, ... $n$gliedrigen, je nachdem derselbe aus ein, zwei, ... n Gliedern besteht*).

---

*) Das erste Beispiel von der Verwandlung einer Zahl in einen Kettenbruch gab 1655 Lord Brounker ohne Beweis; den letzteren suchte Wallis hinzuzufügen (*Opp.* T. I, 469). Eine fernere Anwendung machte Huyghens, um das Verhältniſs zweier groſsen Zahlen näherungsweis durch kleinere Zahlen auszudrücken (*De automato planetario* in den *Opp. reliquis*, Vol. II). Die erste eigentliche Theorie der Kettenbrüche lieferte Euler (*Comment. Acad. Petropol.* T. IX, *a. a.* 1737 und *Introductio in Anal. infin.*).

Bricht man den n-gliedrigen Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots+\cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

der Reihe nach bei dem ersten, zweiten, dritten, ... $n$ten Nenner ab, so entstehen die Brüche:

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2}},\quad \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3}}},\ \ldots.$$

welche Näherungsbrüche heifsen, weil sie sich in manchen Fällen dem Werthe des ganzen Kettenbruches successive nähern. Der erste Näherungsbruch ist nichts Anderes als das erste Glied des Kettenbruches, und der letzte ($n$te) Näherungsbruch ist der ganze Kettenbruch selbst. Durch Reduction erhalten die Näherungsbrüche folgende Formen

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \frac{a_2 b_1}{a_2 a_1+b_2},\quad \frac{a_3 a_2 b_1+b_3 b_1}{a_3(a_2 a_1+b_2)+b_3 a_1},$$
$$\frac{a_4(a_3 a_2 b_1+b_3 b_1)+b_4 a_2 b_1}{a_4[a_3(a_2 a_1+b_2)+b_3 a_1]+b_4(a_2 a_1+b_2)},\ \ldots$$

und wenn man diese Brüche der Reihe nach mit $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$, bezeichnet, so ist

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{a_3 p_2+b_3 p_1}{a_3 q_2+b_3 q_1},\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{a_4 p_3+b_4 p_2}{a_4 q_3+b_4 q_2},\ \ldots$$

Hiernach scheint für jedes ganze positive n

1) $$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_n p_{n-1}+b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1}+b_n q_{n-2}}$$

zu sein und ebenso

2) $$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{a_{n+1}\,p_n+b_{n+1}\,p_{n-1}}{a_{n+1}\,q_n+b_{n+1}\,q_{n-1}}.$$

Nun geht der nächstfolgende Näherungsbruch $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ aus dem vorhergehenden $\frac{p_n}{q_n}$ dadurch hervor, dafs man in diesem $a_n+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ für a_n setzt; denn es ist

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3} + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3} + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}}}$$

Lassen wir dem entsprechend in 1) $a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ an die Stelle von a_n treten, so erhalten wir

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + b_n q_{n-2}}$$

d. i. nach Multiplication mit a_{n+1} im Zähler und Nenner

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(a_{n+1}\, a_n + b_{n+1})\, p_{n-1} + a_{n+1}\, b_n\, p_{n-2}}{(a_{n+1}\, a_n + b_{n+1})\, q_{n-1} + a_{n+1}\, b_n\, q_{n-2}}$$

oder

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1}\,(a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}) + b_{n+1}\, p_{n-1}}{a_{n+1}\,(a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}) + b_{n+1}\, q_{n-1}}$$

und, wenn man gemäfs der Gleichung 1)

$$a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} = p_n, \quad a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} = q_n$$

setzt,

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1}\, p_n + b_{n+1}\, p_{n-1}}{a_{n+1}\, q_n + b_{n+1}\, q_{n-1}}.$$

Diefs ist die Gleichung 2); das hypothetisch angenommene Bildungsgesetz der Näherungsbrüche gilt also für den $(n+1)$ten Näherungsbruch, wenn es für den $n$ten richtig war; es gilt mithin allgemein, wenn es bei dem dritten zutrifft. Für die successive Berechnung der Näherungsbrüche, deren letzter den Totalwerth des ganzen Kettenbruches giebt, hat man daher nicht nöthig, alle die einzelnen Brüche

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b^2}{a_2}}, \quad \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3}}} \quad \text{etc.}$$

auf gewöhliche Weise einzurichten, sondern man berechnet nur die beiden ersten

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{a_2 b_1}{a_2 a_1 + b_2}$$

und leitet aus diesen nach Formel 1) alle übrigen ab.

Bemerkenswerth sind noch die Ausdrücke für die Differenz zweier auf einander folgenden Näherungsbrüche. Man hat nämlich

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n+1}\, p_n + b_{n+1}\, p_{n-1}}{a_{n+1}\, q_n + b_{n+1}\, q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}$$
$$= \frac{b_{n+1}\, p_{n-1}\, q_n - b_{n+1}\, p_n\, q_{n-1}}{q_{n+1}\, q_n}$$
$$= -\frac{b_{n+1}}{q_{n+1}\, q_n}(p_n\, q_{n-1} - p_{n-1}\, q_n),$$

ferner

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n\, q_{n-1} - p_{n-1}\, q_n}{q_n\, q_{n-1}}$$

folglich

$$p_n\, q_{n-1} - p_{n-1}\, q_n = q_n\, q_{n-1}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

und durch Substitution dieses Ausdruckes in die vorhergehende Rechnung

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{b_{n+1}\, q_{n-1}}{q_{n+1}}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

Nennen wir Δ_n die Differenz links, so ist die auf der rechten Seite in Parenthesen stehende $= \Delta_{n-1}$, mithin hängt die $n$te Differenz so von der vorhergehenden ab, daſs

3) $$\Delta_n = -\frac{b_{n+1}\, q_{n-1}}{q_{n+1}}\,\Delta_{n-1}$$

ist. Hiernach kann man alle Differenzen berechnen, weil man die erste kennt, nämlich

4) $$\Delta_1 = \frac{a_2 b_1}{a_2 a_1 + b_2} - \frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}.$$

Unter der Voraussetzung, daſs $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ sämmtlich positiv sind, lassen sich hieraus noch mancherlei Folgerungen ziehen. Dann ist nämlich Δ_1 negativ, Δ_2 positiv, Δ_3 negativ, Δ_4 positiv u. s. f., oder wenn man das Negative und Positive durch < 0 und > 0 unterscheidet,

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} < 0, \quad \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} > 0,$$
$$\frac{p_4}{q_4} - \frac{p_3}{q_3} < 0, \quad \frac{p_5}{q_5} - \frac{p_4}{q_4} > 0,$$

u. s. f.

woraus folgt

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2}, \quad \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3},$$

$$\frac{p_3}{q_3} > \frac{p_4}{q_4}, \quad \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_5}{q_5},$$

u. s. f.

Es ist aber auch, abgesehen von den Vorzeichen, jede Differenz kleiner als die vorhergehende. Denn in der Gleichung 3) hat man

$$\frac{b_{n+1}\, q_{n-1}}{q_{n+1}} = \frac{b_{n+1}\, q_{n-1}}{a_{n+1}\, q_n + b_{n+1}\, q_{n-1}}$$

folglich, weil alle die Gröfsen a und b, mithin auch alle p und q positiv sind,

$$\frac{b_{n+1}\, q_{n-1}}{q_{n+1}} < 1$$

und also

$$\varDelta_n < \varDelta_{n-1}$$

wenn man blofs die numerischen Werthe berücksichtigt. Wir haben also z. B. den numerischen Werth von $\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} >$ als den von $\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}$, oder, weil die erste Differenz an sich negativ, folglich ihr numerischer Werth das Entgegengesetzte ist,

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}$$

woraus

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3}$$

folgt. Ebenso würde aus

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4} > \frac{p_5}{q_5} - \frac{p_4}{q_4}$$

folgen

$$\frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} \text{ u. s. f.}$$

Die Näherungsbrüche ungerader Ordnung nehmen also beständig ab.

Der numerische Werth von $\varDelta_3$ ist ferner kleiner als der von $\varDelta_2$, oder, weil $\varDelta_3$ an sich negativ ist,

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}$$

woraus folgt

$$\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4}.$$

Ebenso würde man

$$\frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} \text{ u. s. f.}$$

finden, d. h. die Näherungsbrüche gerader Ordnung wachsen fortwährend.

Wir haben hier für Kettenbrüche, deren sämmtliche Zähler und Nenner positiv sind, die wesentliche Eigenschaft kennen gelernt, dafs die Näherungsbrüche ungerader Ordnung eine fallende, die gerader Ordnung eine steigende Reihe bilden, während die Differenzen der benachbarten Näherungsbrüche ihren absoluten Werthen nach immer abnehmen. Da nun der letzte Näherungsbruch der Werth des ganzen Kettenbruches ist, so mufs folglich eine Annäherung an den Werth des ganzen Kettenbruches stattfinden. Man kann sich dieses Verhältnifs leicht durch eine Zeichnung veranschaulichen. Man trage nämlich auf einer geraden Linie SP in gleichen Entfernungen von einander die Punkte P_1, P_2, P_3, ... auf, errichte in diesen die Senkrechten P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, ..., und nehme nach irgend einem Maafsstabe $P_1Q_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $P_2Q_2 = \frac{p_2}{q_2}$, $P_3Q_3 = \frac{p_3}{q_3}$ u. s. f. Endlich mache man PQ dem Gesammtwerthe des Kettenbruches gleich und ziehe durch Q eine Parallele QT zu PS. Verbindet man jetzt die Punkte Q_1, Q_3, Q_5, ... und ebenso Q_2, Q_4, Q_6, ... durch eine zusammenhängende krumme Linie, so erhält man zwei Curven, deren erstere vom Punkte Q_1 nach der Geraden QT zu herabgeht, während die zweite vom Punkte Q_2 aus nach jener Geraden hinaufsteigt und zugleich die Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Senkrechten beständig abnehmen. Der letzte Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n}$ eines $n$gliedrigen Kettenbruches ist dann der Gesammtwerth PQ des ganzen Kettenbruches.

Bei weitem weniger einfach gestalten sich die Eigenschaften der Näherungsbrüche in den Fällen, wo einige oder alle Glieder eines Kettenbruches negativ sind. Nur in einem einzigen Falle läfst sich hier eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Näherungsbrüche angeben, wenn nämlich alle Glieder des Kettenbruches mit Ausnahme des ersten negativ und zugleich ganzzahlige echte Brüche sind. Unter der gemachten Voraussetzung hat der Kettenbruch die Form

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \dots}}}$$

worin $a_1, a_2, a_3, \ldots b_1, b_2, b_3, \ldots$ ganze Zahlen sind, welche die Eigenschaften

$$a_1 > b_1, \quad a_2 > b_2, \quad a_3 > b_3, \ldots$$

haben. Hier ist nun

$$\frac{b_1}{a_1} < \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}},$$

denn in dem zweiten Näherungsbruche ist der Nenner vermindert, folglich der Quotient gröfser. Man kann bemerken, dafs derselbe immer noch ein echter Bruch ist, weil im Nenner a_1 wenigstens um eine Einheit gröfser als b_1 sein mufs, aber die Verminderung keine volle Einheit beträgt, indem $\frac{b_1}{a_1} < 1$ ist. Ferner hat man

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}} < \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}}}.$$

Denn es wird rechts der Nenner a_1 um einen gröfseren Bruch vermindert als links, weil

$$\frac{b_2}{a_2} < \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}}$$

ist, wiewohl beide Ausdrücke echte Brüche sind. Man kann auf diese Weise fortfahren zu schliefsen, und findet so das Resultat, dafs jeder Näherungsbruch kleiner als der nächstfolgende ist, dafs mithin die Näherungsbrüche eine steigende Reihe bilden. Die ganze Schlufsweise würde aber nicht passen, wenn nicht alle einzelnen Glieder des Kettenbruches echte Brüche wären, weil dann einer der Nenner in den Näherungsbrüchen negativ werden könnte, wie z. B. in dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{3 - \cfrac{7}{4 - \cfrac{9}{5 - \cfrac{1}{6}}}},$$

wo schon der zweite Näherungsbruch negativ wird.

Es ist übrigens sehr leicht, einen gegebenen Bruch in einen Kettenbruch von vorgeschriebener Form zu verwandeln. Will man z. B. den Bruch $\frac{289}{761}$ in einen Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{6+\cfrac{7}{8+..}}}}$$

auflösen, so hat man folgende von selbst verständliche Rechnung vorzunehmen:

$$\frac{289}{761}=\frac{1}{\frac{761}{289}}=\frac{1}{2+\frac{183}{289}},$$

$$\frac{183}{289}=\frac{3\,.\,183}{867}=\frac{3}{\frac{867}{183}}=\frac{3}{4+\frac{135}{183}},$$

$$\frac{135}{183}=\frac{5\,.\,135}{915}=\frac{5}{\frac{915}{135}}=\frac{5}{6+\frac{105}{135}},$$

$$\frac{105}{135}=\frac{7\,.\,105}{945}=\frac{7}{\frac{945}{105}}=\frac{7}{8+\frac{105}{105}}=\frac{7}{8+1}.$$

Weiter kann man hier nicht gehen, weil der letzte Rest kein Bruch, sondern die Einheit ist. Substituirt man jede Gleichung in die vorhergehende, so erhält man

$$\frac{289}{761}=\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{6+\cfrac{7}{8+1}}}},$$

also den Bruch in der vorgeschriebenen Form; so weit dieſs überhaupt möglich ist. Um denselben Bruch in einen Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{2}{5+\cfrac{4}{7+\cfrac{6}{9+\cfrac{8}{11+..}}}}$$

zu verwandeln, bedarf es folgender Rechnung:

$$\frac{289}{761}=\frac{2\,.\,289}{1522}=\frac{2}{\frac{1522}{289}}=\frac{2}{5+\frac{77}{289}},$$

$$\frac{77}{289}=\frac{4\,.\,77}{1156}=\frac{4}{\frac{1156}{77}}=\frac{4}{7+\frac{617}{77}},$$

$$\frac{617}{77}=\frac{6\,.\,617}{462}=\frac{6}{\frac{462}{617}}=\frac{6}{9-\frac{5091}{617}}.$$

Will man keine negativen Glieder, so mufs man hier abbrechen und erhält durch Substitution jeder Gleichung in die vorhergehende:

$$\frac{289}{761} = \cfrac{2}{5 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{6}{9 - \cfrac{5091}{617}}}},$$

wobei die verlangte Form so weit als möglich beobachtet ist. Diefs Beispiel zeigt zugleich, dafs man den nämlichen Bruch in unendlich viele Kettenbrüche verwandeln kann.

Es läfst sich recht gut denken, dafs Rechnungen der Art existiren können, bei denen man ins Unendliche fortgehen darf, ohne auf negative Glieder zu stofsen, d. h. mit anderen Worten, dafs es unendliche Kettenbrüche geben kann, deren successive Näherungsbrüche sich einem bestimmten endlichen Werthe als Grenze beständig nähern. Wir wollen diesen wichtigen Gegenstand einer genaueren Betrachtung unterwerfen.

§. 66.

Die unendlichen Kettenbrüche, ihre Convergenz und Divergenz.

I. Wir untersuchen zunächst diejenigen Kettenbrüche, deren Glieder sämmtlich positiv sind, so dafs also in dem Ausdrucke

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \dots \textit{ in inf.}}}}$$

die Gröfsen $a_1, a_2, \dots b_1, b_2, \dots$ als positiv betrachtet werden.

Durch ganz dieselben Betrachtungen wie im vorigen Paragraphen überzeugt man sich leicht von der Wahrheit der folgenden Sätze:

1) Jeder Näherungsbruch ungerader Ordnung ist gröfser und jeder Näherungsbruch gerader Ordnung kleiner, als alle folgenden Näherungsbrüche.
2) Die Näherungsbrüche ungerader Ordnung werden immer kleiner, die gerader Ordnung immer gröfser.

Es folgt hieraus noch

3) Kein Näherungsbruch ungerader Ordnung kann so klein sein als einer gerader Ordnung, und kein Näherungsbruch gerader Ordnung so grofs als irgend einer ungerader Ordnung.

Da nun die Näherungsbrüche ungerader Ordnung immer abneh-

men, ohne so klein zu werden, als man will, und ebenso die Näherungsbrüche gerader Ordnung immer wachsen, ohne beliebig grofs werden zu können, so ist beim unendlichen Fortgehen kein anderer Fall möglich, als dafs sowohl die Näherungsbrüche ungerader als die gerader Ordnung, jede für sich einer gewissen Grenze zueilen, ohne sie erreichen zu können. Es sind also für

$$Lim \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = h, \quad Lim \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = k$$

h und k gewifs zwei endliche bestimmte Gröfsen. Dabei können nur zwei Fälle vorkommen: entweder sind h und k verschieden, oder sie sind identisch. Mit einem Kettenbruche der ersten Art wäre nicht viel anzufangen; man könnte nicht sagen, derselbe sei dieser oder jener Gröfse gleich, sondern blofs, er sei eine symbolische Darstellung von zwei Gröfsen zugleich, von denen die eine der Grenzwerth der Näherungsbrüche ungerader, die andere der Grenzwerth der Näherungsbrüche gerader Ordnung ist. Kettenbrüche dieser Art können divergenten Reihen verglichen werden, mit denen man auch nicht rechnen kann, und sie mögen defshalb entsprechend divergente Kettenbrüche heifsen.

Sind dagegen die beiden Grenzen h und k identisch, so nähern sich die Näherungsbrüche des Kettenbruches von beiden Seiten her dieser gemeinschaftlichen Zahl, welcher sie so nahe kommen können, als man es verlangt, und die wir den Grenzwerth des Kettenbruches nennen wollen. Es ist dann für unbegrenzt wachsende n

$$k = Lim \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}},$$

wofür wir kürzer schreiben

$$k = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots \; in\; inf.}}}$$

Kettenbrüche dieser Art mögen convergente Kettenbrüche heifsen, weil sie mit den convergenten Reihen die Eigenschaft gemein haben, dafs man sich mehr und mehr einer fest bestimmten Grenze nähert, je mehr Glieder man zusammennimmt.

Es entsteht nun die Frage, woran man die Convergenz oder Divergenz eines unendlichen Kettenbruches erkennen soll, welcher, wie hier immer vorausgesetzt wird, nur aus positiven Gliedern besteht.

Auf diese Frage, welche für die Theorie der Kettenbrüche von ebenso grofser Wichtigkeit ist, wie die analoge Frage für die Theorie der Reihen, kann man im Allgemeinen sehr leicht antworten, wiewohl die specielle Anwendung der Antwort nicht ohne Schwierigkeiten ist. Betrachten wir nämlich die Differenzen je zweier aufeinander folgenden Näherungsbrüche, so ist

$$\varDelta_{2n-1} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

Durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n wird

$$Lim\, \varDelta_{2n-1} = Lim \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - Lim \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$$

d. i. wenn wir uns an die Bedeutung von h und k erinnern,

$$Lim\, \varDelta_{2n-1} = k - h.$$

Für einen convergenten Kettenbruch ist $k = h$, folglich

$$Lim\, \varDelta_{2n-1} = 0,$$

dagegen bei einem divergenten Kettenbruche k von h verschieden, mithin

$$Lim\, \varDelta_{2n-1} = \text{einer endlichen Gröfse.}$$

Ebenso mufs auch umgekehrt, wenn $Lim\, \varDelta_{2n-1} = 0$ ist, $k = h$, und wenn $Lim\, \varDelta_{2n-1}$ von Null verschieden ist, auch k von h verschieden sein. Wir können also sagen: ein Kettenbruch convergirt ganz sicher, wenn die Differenzen je zwei benachbarter Näherungsbrüche sich unbegrenzt der Null nähern, und er divergirt gewiss, wenn diese Bedingung nicht stattfindet.

Nun ist überhaupt nach Formel 3) §. 65

$$\varDelta_n = -\frac{b_{n+1}\, q_{n-1}}{q_{n+1}} \varDelta_{n-1}$$

und hieraus findet man der Reihe nach

$$\varDelta_2 = -\frac{b_3 q_1}{q_3} \varDelta_1$$

$$\varDelta_3 = -\frac{b_4 q_2}{q_4} \varDelta_2 = \frac{b_3 q_1}{q_3} \cdot \frac{b_4 q_2}{q_4} \varDelta_1$$

$$\varDelta_4 = -\frac{b_5 q_3}{q_5} \varDelta_3 = -\frac{b_3 q_1}{q_3} \cdot \frac{b_4 q_2}{q_4} \cdot \frac{b_5 q_3}{q_5} \varDelta_1$$

u. s. f.

überhaupt

$$1) \qquad \varDelta_n = (-1)^{n-1} \frac{b_3 q_1}{q_3} \cdot \frac{b_4 q_2}{q_4} \cdot \frac{b_5 q_3}{q_5} \cdots \frac{b_{n+1}\, q_{n-1}}{q_{n+1}} \varDelta_1.$$

Man bemerkt leicht, dafs hier $\varDelta_n$ durch ein Product von lauter echten Brüchen dargestellt wird; denn die einzelnen Brüche sind von der Form

$$\frac{b_{m+1}\,q_{m-1}}{q_{m+1}} = \frac{b_{m+1}\,q_{m-1}}{a_{m+1}\,q_m + b_{m+1}\,q_{m-1}}$$

und hier sieht man gleich, dafs der Nenner gröfser als der Zähler ist, weil alle a und b, folglich auch alle q, positiv sind. Da es nur auf die absoluten Werthe ankommt, so ist

$$Lim\,\Delta_n = \Delta_1 \cdot \frac{b_3 q_1}{q_3} \cdot \frac{b_4 q_2}{q_4} \cdot \frac{b_5 q_3}{q_5} \ldots in\ inf.$$

Ein unendliches Product von echten Brüchen kann aber ebensowohl eine endliche bestimmte Gröfse, als die Null zur Grenze haben. Der erste Fall tritt leicht dann ein, wenn die einzelnen Factoren durch Zunahme sich mehr und mehr der Einheit nähern; wir müssen ihn daher zu vermeiden suchen. Sind aber alle Factoren kleiner als ein gewisser, selbst echter Bruch $\frac{1}{u}$ (wo $u > 1$ ist), so hat man nach 1)

$$\Delta_n < \left(\frac{1}{u}\right)^{n-1} \Delta_1,$$

folglich, weil $Lim \left(\frac{1}{u}\right)^{n-1} = 0$ ist, um so mehr

$$Lim\,\Delta_n = 0.$$

Es convergirt also der in Rede stehende Kettenbruch ganz gewifs, wenn alle die einzelnen Factoren

$$\frac{b_3 q_1}{q_3},\ \frac{b_4 q_2}{q_4},\ \frac{b_5 q_3}{q_5},\ \ldots in\ inf.$$

kleiner als die Einheit sind und es bleiben, so weit man auch in der Reihe selbst fortgehen mag. Wir können diese Bedingungen einfach durch die Ungleichung

$$Lim\,\frac{b_{n+1}\,q_{n-1}}{q_{n+1}} < 1$$

ausdrücken.

Es ist aber

$$\frac{b_{n+1}\,q_{n-1}}{q_{n+1}} = \frac{b_{n+1}\,q_{n-1}}{a_{n+1}\,q_n + b_{n+1}\,q_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{a_{n+1}\,q_n}{b_{n+1}\,q_{n-1}} + 1}.$$

Soll nun der Grenzwerth dieses Ausdruckes unter der Einheit bleiben, so mufs

$$Lim\,\frac{a_{n+1}\,q_n}{b_{n+1}\,q_{n-1}} > 0$$

sein. Man hat weiter

$$\frac{a_{n+1}\,q_n}{b_{n+1}\,q_{n-1}} = \frac{a_{n+1}\,(a_n\,q_{n-1} + b_n\,q_{n-2})}{b_{n+1}\,q_{n-1}}$$
$$= \frac{a_{n+1}\,a_n}{b_{n+1}} + \frac{a_{n+1}\,b_n}{b_{n+1}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}.$$

Ist nun schon

$$Lim\,\frac{a_{n+1}\,a_n}{b_{n+1}} > 0,$$

so ist offenbar die Bedingung

$$Lim\,\frac{a_{n+1}\,q_n}{b_{n+1}\,q_{n-1}} > 0$$

um so mehr erfüllt, weil a_{n+1}, b_n, b_{n+1}, q_{n-2} und q_{n-1} positive Gröfsen sind, also $Lim\,\frac{a_{n+1}\,b_n}{b_{n+1}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$ nicht negativ werden kann. Wir können daher sagen:

Der Kettenbruch

2) $$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

worin alle a und b positiv sind, convergirt sicher, wenn

3) $$Lim\,\frac{a_n\,a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0$$

ist bei unbegrenzt wachsenden n. Findet aber diese Bedingung nicht statt, so läfst sich nicht entscheiden, ob der Kettenbruch convergirt oder divergirt.

Hiernach findet man, dafs von den Kettenbrüchen

$$\cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cdots}}}$$

$$\cfrac{1^2}{2 + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cdots}}}$$

der erste sicher convergirt, während man diefs von dem zweiten nicht behaupten kann.

II. Auch bei denjenigen Kettenbrüchen, in welchen alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, negativ sind, können Fälle der Convergenz oder Divergenz vorkommen. Einen convergenten Kettenbruch nennen wir hier wieder denjenigen, dessen Näherungsbrüche sich einer ein-

zigen bestimmten Gröfse als Grenze fortwährend nähern, divergent jeden, welcher diese Eigenschaft nicht besitzt. Im Allgemeinen ist die Convergenz bei Kettenbrüchen mit negativen Gliedern sehr schwer zu entscheiden und läfst sich mit Sicherheit nur dann nachweisen, wenn in dem unendlichen Kettenbruche

$$4)\qquad \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cdots}}}$$

alle einzelnen Glieder

$$\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\ \ldots$$

echte Brüche sind, welche ganze positive Zahlen zu Zählern und Nennern haben.

Zuerst bemerkt man leicht, dafs alle Näherungsbrüche positive echte Brüche sind. Denn da alle a und b ganze Zahlen, $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots$ echte Brüche sind, so mufs a_1 von b_1 wenigstens um eine Einheit differiren. Es wird aber in dem zweiten Näherungsbruche

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}}$$

von a_1 keine volle Einheit, sondern nur ein Bruchtheil derselben abgezogen, folglich ist noch immer

$$a_1 - \frac{b_2}{a_2} > b_1,$$

mithin der zweite Näherungsbruch $\frac{p_2}{q_2}$ ein positiver echter Bruch. In

$$\frac{p_3}{q_3} = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}}}$$

ist nun ferner aus ganz denselben Gründen

$$\cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}}$$

ein positiver echter Bruch; wird derselbe von a_1 abgezogen, welches wenigstens um eine Einheit gröfser ist als b_1 ist, so bleibt

$$a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}} > b_1,$$

woraus folgt, daſs auch $\frac{p_3}{q_3}$ ein positiver echter Bruch ist. Aus den nämlichen Gründen muſs die ähnlich gebildete Gröſse

$$\cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4}}}$$

ein echter Bruch sein, woraus folgt, daſs

$$\frac{p_4}{q_4} = \cfrac{q_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4}}}}$$

ein positiver echter Bruch ist. Man übersieht auf der Stelle, daſs die Fortsetzung dieser Schluſsreihe ins Unendliche möglich ist und daſs sie zeigt, wie alle Näherungsbrüche echte und positive Brüche sind.

Ferner läſst sich nachweisen, daſs die Näherungsbrüche beständig wachsen. Man kann dieſs auf ähnliche Weise wie im vorigen Paragraphen thun, gelangt aber auch auf folgende Weise dazu. Da schon gezeigt worden ist, daſs

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \frac{p_3}{q_3}, \quad \frac{p_4}{q_4}, \ldots .$$

sämmtlich positiv sind, so folgt leicht, daſs auch

$$q_1, \; q_2, \; q_3, \; q_4, \ldots$$

positiv sein müssen. Da ferner b_1 positiv ist, aber $b_2, b_3, b_4, \ldots$ negativ sind, so hat man aus den Formeln 3) und 4) in §. 65

$$\varDelta_n = \frac{b_{n+1}\, q_{n-1}}{q_{n+1}}\, \varDelta_{n-1}$$

$$\varDelta_1 = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}.$$

Hieraus findet man für $n = 2$, 3 u. s. f.

$$\varDelta_2 = \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2} \cdot \frac{b_3 q_1}{q_3},$$

$$\varDelta_3 = \frac{p_4}{q_4} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2} \cdot \frac{b_3 q_1}{q_3} \cdot \frac{b_4 q_2}{q_4},$$

u. s. f.

Es sind also alle Differenzen positiv und daraus folgt

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_4}{q_4} \ldots$$

d. h. die Näherungsbrüche wachsen beständig. Gleichwohl können sie nicht ins Unendliche zunehmen, weil sie nach dem Vorigen immer

echte Brüche bleiben; es müssen sich folglich die successiven Näherungsbrüche durch beständige Zunahme einer gewissen festen Grenze nähern, welche höchstens die Einheit sein kann. Man hat daher den Satz:

Der unendliche Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \dots}}}$$

convergirt immer, wenn seine einzelnen Glieder

$$\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\ \dots.$$

echte Brüche sind, deren Zähler und Nenner aus ganzen positiven Zahlen bestehen.

Es giebt in der That einen, aber auch nur einen Fall, in welchem der Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \dots}}}$$

worin $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$ echte Brüche sind, die Einheit zur Grenze hat, wenn nämlich jeder der einzelnen Nenner um eine Einheit gröfser als sein Zähler, der Kettenbruch also von der Form

$$5)\qquad \cfrac{b_1}{b_1 + 1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \dots}}}$$

ist, worin sonst b_1, b_2, b_3, ... ganz beliebig bleiben. Da dieser Fall von Interesse ist, so wollen wir ihn etwas näher ansehen.

Zur successiven Berechnung der Näherungsbrüche hat man hier die Formeln

$$p_{n+1} = (b_{n+1} + 1)\, p_n - b_{n+1}\, p_{n-1},$$
$$q_{n+1} = (b_{n+1} + 1)\, q_n - b_{n+1}\, q_{n-1},$$

aus welchen man leicht erhält

$$6)\qquad p_{n+1} - p_n = (p_n - p_{n-1})\, b_{n+1},$$
$$7)\qquad q_{n+1} - q_n = (q_n - q_{n-1})\, b_{n+1};$$

ferner

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{b_1}{b_1 + 1},\quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{b_1 b_2 + b_1}{b_1 b_2 + b_1 + 1},$$

folglich

$$p_1 = b_1;$$
$$p_2 - p_1 = b_1 b_2,$$

und nun folgt aus No. 6) für $n = 2, 3, 4$, u. s. f.

$$p_3 - p_2 = (p_2 - p_1) b_3 = b_1 b_2 b_3,$$
$$p_4 - p_3 = (p_3 - p_2) b_4 = b_1 b_2 b_3 b_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n - p_{n-1} = \cdots\cdots\cdots = b_1 b_2 b_3 \ldots b_n.$$

Addirt man alle diese Gleichungen nebst den zwei vorhergehenden, so ergiebt sich sogleich:

8) $$p_n = b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \cdots + b_1 b_2 b_3 \ldots b_n.$$

Ebenso hat man

$$q_1 = b_1 + 1,$$
$$q_2 - q_1 = b_1 b_2,$$

und nach No. 7) für $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$q_3 - q_2 = (q_2 - q_1) b_3 = b_1 b_2 b_3,$$
$$q_4 - q_3 = (q_3 - q_2) b_4 = b_1 b_2 b_3 b_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$q_n - q_{n-1} = \cdots\cdots\cdots = b_1 b_2 b_3 \ldots b_n,$$

folglich durch Addition dieser und der vorhergehenden Gleichungen:

$$q_n = 1 + b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \cdots + b_1 b_2 b_3 \ldots b_n,$$

mithin der $n$te Näherungsbruch

9) $$\frac{p_n}{q_n} = \frac{b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \cdots + b_1 b_2 \ldots b_n}{1 + b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \cdots + b_1 b_2 \ldots b_n}.$$

Läſst man hier n ins Unendliche wachsen, so wird offenbar p_n gröſser als jede angebbare Zahl, weil es einer aus n Gliedern bestehenden Reihe gleich ist, von denen jedes eine positive ganze Zahl sein muſs. Bemerkt man aber, daſs $q_n = 1 + p_n$, also

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n}{p_n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{p_n}}$$

ist, so erhält man für unbegrenzt wachsende n

$$Lim \frac{p_n}{q_n} = 1,$$

mithin auch

$$1 = \cfrac{b_1}{b_1 + 1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \ldots}}}$$

wodurch der Werth des Kettenbruches gefunden ist.

Nimmt man z. B. für $b_1, b_2, b_3, \ldots$ die natürlichen, die ungeraden und geraden Zahlen, so hat man

$$1 = \cfrac{1}{2 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{3}{4 - \dots}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{3}{4 - \cfrac{5}{6 - \dots}}}$$

$$= \cfrac{2}{3 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{6}{7 - \dots}}}$$

und man würde auch die Näherungsbrüche dieser Kettenbrüche nach Formel 9) berechnen können.

Man überzeugt sich nun leicht, dafs der Werth eines Kettenbruches nicht mehr die Einheit sein kann, wenn auch nur ein einziger Nenner seinen Zähler um mehr als eine Einheit übersteigt. Ist z. B. der Kettenbruch

10) $$\cfrac{b_1}{b_1 + 1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \dots}}}}$$

gegeben, worin a_3 den Zähler b_3 um mehr als eine Einheit übertreffen soll, so gelten folgende Schlüsse. Der Kettenbruch

$$\cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \cfrac{b_5}{b_5 + 1 - \dots}}$$

hat die Einheit zum Grenzwerthe, weil in ihm alle Nenner die zugehörigen Zähler um eine Einheit übersteigen. Der unendliche Kettenbruch in 10) ist also gleich dem folgenden endlichen:

11) $$\cfrac{b_1}{b_1 + 1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \cfrac{b_3}{a_3 - 1}}}.$$

Hier ist nun $\frac{b_3}{a_3 - 1}$ ein echter Bruch. Denn da b_3 und a_3 ganze Zahlen bedeuten und a_3 die Zahl b_3 der Voraussetzung nach um mehr als eine Einheit übertreffen soll, so mufs a_3 wenigstens $= b_3 + 2$, also $a_3 - 1$ wenigstens $= b_3 + 1$ sein, woraus folgt

$$\frac{b_3}{a_3 - 1} < 1.$$

Der Kettenbruch 11) gehört also unter diejenigen, deren einzelne Glieder echte Brüche sind, welche ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben. Sein Werth, d. h. der des unendlichen Kettenbru-

ches 10), ist demnach ein echter Bruch, also von der Einheit verschieden. Ganz ähnliche Schlüsse sind in jedem anderen Falle anwendbar.

§. 67.

Die Irrationalität gewisser Kettenbrüche.

Bei den Verwandlungen gewöhnlicher Brüche in Kettenbrüche von einer gegebenen Form, wie wir diese in §. 65 vorgenommen hatten, kann man im Allgemeinen bemerken, dafs früher oder später entweder kein gebrochenes Glied mehr kommt, also der Kettenbruch sich mit einer ganzen Zahl schliefst, oder ein negatives Glied entsteht, wenn auch das vorgelegte Schema keines enthält. Diese Erscheinung tritt namentlich immer dann ein, wenn die einzelnen Glieder des gegebenen Schemas echte Brüche sind, welche ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben. Man überzeugt sich hiervon leicht durch den Versuch, einen beliebigen echten Bruch $\frac{B}{A}$ in einen Kettenbruch von der Form

2) $$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}},$$

in welchem die einzelnen Glieder

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{b_2}{a_2}, \quad \frac{b_3}{a_3}, \ldots$$

sämmtlich echte Brüche sind, zu verwandeln.

I. Wir wollen zuerst voraussetzen, dafs die Glieder des Kettenbruches sämmtlich positiv sind. Soll nun $\frac{B}{A}$ in einen Kettenbruch von der obigen Form 1) umgewandelt werden, so mufs man dem $\frac{B}{A}$ zuvörderst den Zähler b_1 verschaffen und dann seinen Nenner in zwei Theile zerlegen, von welchen der eine a_1 ist. Diefs geschieht durch folgende Rechnung:

$$\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{\cfrac{b_1 A}{B}}.$$

Soll diefs gleich dem in 1) stehenden Ausdrucke sein, so folgt daraus die Gleichung der Nenner, also

$$\frac{b_1 A}{B} = a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}$$

oder

$$\frac{b_1 A - a_1 B}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}$$

und wenn wir der Kürze wegen

$$b_1 A - a_1 B = C$$

setzen

2) $$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}.$$

Es ist ferner

$$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{\cfrac{b_2 B}{C}}$$

und durch Vergleichung mit dem Kettenbruche in No. 2)

$$\frac{b_2 B}{C} = a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cdots}}$$

oder

$$\frac{b_2 B - a_2 C}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cdots}}$$

und wenn wir

$$b_2 B - a_2 C = D$$

setzen,

3) $$\frac{D}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cdots}}$$

Man übersieht leicht, wie diese Rechnung weiter geht. Werden nämlich die Zahlen $C, D, E, \ldots$ aus folgenden Gleichungen bestimmt:

$$C = b_1 A - a_1 B,$$
$$D = b_2 B - a_2 C,$$
$$E = b_3 C - a_3 D,$$
u. s. f.

so ist

4) $$\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots}}$$

5) $$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}$$

6) $$\frac{D}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cdots}}$$

7) $$\frac{E}{D} = \cfrac{b_4}{a_4 + \cfrac{b_5}{a_5 + \cdots}}$$

u. s. w.

Nun convergirt aber der unendliche Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

ganz sicher, wenn überhaupt a_n immer $> b_n$ ist, weil dann gewifs

$$Lim \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0$$

ist, und sein Grenzwerth mufs ein echter Bruch sein, weil er kleiner als der erste Näherungsbruch $\frac{b_1}{a_1}$, und dieser selbst ein echter Bruch ist. Wollen wir also $\frac{B}{A}$ in den unendlichen Kettenbruch 4) verwandeln, so mufs $\frac{B}{A}$ ein echter Bruch sein. Die nämlichen Schlüsse sind aber auch auf die Gleichung 5) anwendbar. Hier ist ebenfalls der Kettenbruch rechts ein unendlicher convergenter und sein Grenzwerth < 1. Es ist also auch $\frac{C}{B}$ ein echter Bruch. Aus den nämlichen Gründen sind ferner die Brüche $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$ u. s. f. echte Brüche. Hieraus folgt der Reihe nach

$$A > B, \quad B > C, \quad C > D, \quad D > E \text{ u. s. f.}$$

oder

$$A > B > C > D > E \text{ etc.}$$

Die Zahlen $A, B, C, D, \ldots$ bilden also eine unendlich abnehmende Reihe. Sie sind aber auch sämmtlich ganze Zahlen, wie man sogleich aus ihrem oben angegebenen Bildungsgesetze ersieht. Wenn aber eine Reihe von positiven ganzen Zahlen ins Unendliche abnimmt, so mufs sie an irgend einer Stelle ins Negative übergehen. Diefs kann entweder mittelst Durchganges durch die Null, wie in

$$\ldots 6, 4, 2, 0, -2, -4, \ldots$$

oder mit Überspringung der Null, wie in

$$\ldots 5, 3, 1, -1, -3, -5, \ldots$$

geschehen. Im ersten Falle müfste also eine der Zahlen $A, B, C, D, \ldots$, mithin auch einer der Brüche

$$\frac{B}{A}, \quad \frac{C}{B}, \quad \frac{D}{C}, \quad \frac{E}{D}, \ldots$$

d. h. einer der Kettenbrüche:

$$\frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \cdots}}, \quad \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \cdots}}$$

$$\frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \cdots}}, \quad \frac{b_4}{a_4 + \frac{b_5}{a_5 + \cdots}}, \text{ u. s. f.}$$

gleich Null werden, was nicht möglich ist.

Im zweiten Falle mufs in der Reihe $A, B, C, D, \ldots M, N, P, \ldots$ eine der Zahlen, etwa M, die letzte positive, und die darauf folgende N die erste negative, also der Quotient $\frac{M}{N}$ negativ sein. Es müfste also auch der entsprechende Kettenbruch, etwa

$$\frac{b_n}{a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \cdots}}$$

einen negativen Werth haben, was unmöglich ist.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dafs es nicht möglich ist, einen rationalen echten Bruch in einen unendlichen Kettenbruch zu verwandeln, dessen Glieder echte Brüche sind und ganze positive Zahlen zu Zählern und Nennern haben, weil früher oder später ein Glied erscheint, dessen Zähler die Null oder eine negative Zahl ist. Man übersieht auch gleich, dafs dieses Glied um so früher eintreten wird, je kleiner die Zahlen A und B selbst sind, weil dann die Reihe $A, B, C, D, \ldots$ bald ins Negative übertritt, dafs dagegen für sehr grofse A und B viele Glieder des Kettenbruches positiv sein können, weil die Reihe $A, B, C, \ldots$, wenn sie hoch anfängt, lange zu laufen hat, ehe sie das Gebiet des Negativen erreicht.

Wenn umgekehrt ein unendlicher Kettenbruch von der Form gegeben wird:

$$\frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

worin $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$ sämmtlich echte Brüche, $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ ganze positive Zahlen sind, so kann derselbe nicht einen ra-

tionalen echten Bruch zum Grenzwerthe haben, weil sonst gegen die Voraussetzung ein negativer oder ein sich annullirender Zähler in demselben vorkommen müfste. Aber der gesuchte Grenzwerth ist sicher ein echter Bruch, weil er unter dem ersten Näherungsbruche $\frac{b_1}{a_1}$, der selbst echt ist, liegen mufs. Es kann folglich der Näherungswerth des ganzen unendlichen Kettenbruches kein rationaler, sondern er mufs ein irrationaler echter Bruch sein. Diefs stimmt auch ganz zu der Bemerkung, dafs der aus $\frac{B}{A}$ entstehende Kettenbruch desto mehr positive Glieder enthält, je gröfser A und B sind. Bedeutet aber $\frac{B}{A}$ einen irrationalen echten Bruch, so sind B und A unendlich grofse Zahlen; der Anfang der Reihe $A, B, C, \ldots$ liegt also über jeder angebbaren Zahl (wie bei der Reihe der natürlichen Zahlen, rückwärts genommen) und folglich kann die Reihe $A, B, C, \ldots$ selbst ins Unendliche fallen, ohne negativ zu werden.

II. Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich für diejenigen Kettenbrüche durchführen, in denen alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, negativ sind und ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben, vorausgesetzt noch, dafs von irgend einer Stelle an die Nenner ihre zugehörigen Zähler um mehr als eine Einheit übertreffen.

Ist nämlich

$$8)\qquad \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cdots}}}$$

der gegebene unendliche Kettenbruch, in welchem

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \frac{b_2}{a_2},\quad \frac{b_3}{a_3},\ \ldots$$

echte Brüche, $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ ganze positive Zahlen sind, so würde der Versuch, einen rationalen Bruch $\frac{B}{A}$ in jenen Kettenbruch zu verwandeln, zu folgenden Rechnungen veranlassen:

$$\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{\cfrac{b_1 A}{B}};$$

soll diefs gleich dem Kettenbruche in 8) sein, so folgt

$$\frac{b_1 A}{B} = a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}$$

mithin

$$\frac{a_1 B - b_1 A}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \ldots}}}$$

oder für

$$9) \quad \begin{cases} a_1 B - b_1 A = C, \\ \dfrac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \ldots}}} \end{cases}$$

Ferner ist

$$\frac{C}{B} = \frac{b_2}{\frac{b_2 B}{C}},$$

und wenn diefs gleich dem Kettenbruche in 9) sein soll, so mufs

$$\frac{b_2 B}{C} = a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \ldots}}$$

oder für

$$10) \quad \begin{cases} a_2 C - b_2 B = D, \\ \dfrac{D}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \cfrac{b_5}{a_5 - \ldots}}} \end{cases}$$

sein. Ebenso wäre ferner für

$$a_3 D - b_3 C = E,$$

$$\frac{E}{D} = \cfrac{b_4}{a_4 - \cfrac{b_5}{a_5 - \cfrac{b_6}{a_6 - \ldots}}}$$

u. s. w.

Vorausgesetzt nun, dafs in allen den einzelnen Kettenbrüchen

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ldots}}, \quad \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}} \quad \text{u. s. f.}$$

die Nenner ihre entsprechenden Zähler um mehr als eine Einheit übersteigen, so sind die Werthe aller jener Kettenbrüche, mithin auch die Brüche

$$\frac{B}{A}, \quad \frac{C}{B}, \quad \frac{D}{C}, \quad \frac{E}{D}, \ldots$$

positiv und kleiner als die Einheit, mithin

$$A > B, \quad B > C, \quad C > D, \quad D > E \text{ u. s. f.}$$

Hier sind nun ganz die nämlichen Schlüsse anwendbar wie früher, aus welchen folgt, dafs eine der Zahlen $A, B, C, \ldots$ gleich Null oder negativ werden mufs, was nicht sein kann, weil alle die einzelnen Kettenbrüche

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ldots}}, \quad \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}} \quad \text{u. s. f.}$$

positive echte Brüche zu Grenzwerthen haben. Es ist also die Voraussetzung, dafs der unendliche Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}}}$$

einen rationalen Bruch zum Grenzwerthe habe, falsch, und er hat demnach einen irrationalen Grenzwerth.

Diese Betrachtungen würden aber nur theilweise passen, wenn von irgend einer Stelle an die Nenner des Kettenbruches ihre Zähler nur um eine Einheit überstiegen. Wäre z. B. der Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \ldots}}}},$$

wo nur die ersten zwei Nenner ihre Zähler um mehr als eine Einheit übersteigen, so setze man den Werth desselben $= \frac{B}{A}$; man hat dann für

$$a_1 B - b_1 A = C,$$

$$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \ldots}}}$$

und für

$$a_2 C - b_2 B = D,$$

$$\frac{D}{C} = \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \cfrac{b_5}{b_5 + 1 - \ldots}}}$$

Nun ist der Reihe nach $\frac{B}{A} < 1$, $\frac{C}{B} < 1$, aber $\frac{D}{C}$ nicht < 1, weil der Grenzwerth des entsprechenden Kettenbruches die Einheit ist. Man hat daher

$$A > B, \quad B > C, \quad C = D = E \ldots$$

Hier geht also die Abnahme nicht ins Unendliche, sondern nur bis zu einer gewissen Stelle. Es sind also die weiteren Schlüsse nicht, wie vorhin, anwendbar; dagegen hat man wegen $D = C$ auch

$$a_2 C - b_2 B = C,$$

folglich

$$C = \frac{b_2 B}{a_2 - 1};$$

ferner:

$$a_1 B - b_1 A = \frac{b_2 B}{a_2 - 1},$$

woraus

$$\frac{B}{A} = \frac{b_2 (a_2 - 1)}{a_1 (a_2 - 1) - b_2}$$

folgt. Dieſs würde man auch unmittelbar erhalten, wenn man bemerkte, daſs der in Rede stehende Kettenbruch dem folgenden

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - 1}}$$

gleich ist, und diesen einrichtete.

Fassen wir nun alles Bisherige zusammen, so können wir das Theorem aussprechen:

Wenn in dem unendlichen Kettenbruche

$$\cfrac{b_1}{a_1 \pm \cfrac{b_2}{a_2 \pm \cfrac{b_3}{a_3 \pm \ldots}}}$$

alle einzelnen Glieder echte Brüche sind, welche ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben, wenn ferner von keiner Stelle an der Grenzwerth des übrigen unendlichen Kettenbruches der Einheit gleich ist, so hat der genannte Kettenbruch einen irrationalen echten Bruch zum Grenzwerthe.

Wir werden später von diesem merkwürdigen Satze einige Anwendungen machen*).

---

*) Legendre, *Eléments de géométrie*, Note IV.

§. 68.

Die Reste der Kettenbrüche.

Schon bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Kettenbruch von vorgeschriebener Form begegnet man der Erscheinung, dafs der Nenner des letzten Partialbruches einen Rest bei sich führt, der aus der Natur der ganzen Rechnung von selbst hervorgeht; so war in den früheren Beispielen

$$\frac{289}{761} = \cfrac{2}{5 + \cfrac{77}{289}} = \cfrac{2}{5 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{617}{74}}}$$

$$= \cfrac{2}{5 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{6}{9 - \cfrac{5091}{617}}}}.$$

Das allgemeine Schema derartiger Kettenbrüche ist

$$1)\qquad \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n + r_n}}}}$$

und hier entsteht die Frage, ob man berechtigt ist, den Rest r_n wegzulassen, sobald die Anzahl n der Partialbrüche ins Unendliche wächst. Man kann diese Frage auch so formuliren: „unter welchen Umständen hat die Differenz der beiden Kettenbrüche

$$2)\qquad \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n + r_n}}}}$$

und

$$3)\qquad \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

für unendlich wachsende n die Null zur Grenze,“ denn es ist unmittelbar klar, dafs in den Fällen, wo dieser Grenzwerth stattfindet, beide Kettenbrüche identisch werden, sobald man sie ins Unendliche

fortsetzt. Es läfst sich leicht vermuthen, dafs die Weglassung des Restes, ähnlich wie bei den Reihen, dann erlaubt sein werde, wenn er selbst sich der Grenze Null nähert; indessen bedarf die Sache doch einer genaueren Untersuchung, weil diefs, wie man gleich sehen wird, nicht der einzige Fall ist, in welchem die Differenz der in 2) und 3) verzeichneten Kettenbrüche die Null zur Grenze hat.

Bezeichen wir die Kettenbrüche

$$\frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2+\cdots+\frac{b_{n-2}}{a_{n-2}}}}, \quad \frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2+\cdots+\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}}}$$

mit $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ und den Kettenbruch in 3) mit $\frac{p_n}{q_n}$, so ist nach einer früheren Formel

$$4)\qquad \frac{p_n}{q_n}=\frac{a_n p_{n-1}+b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1}+b_n q_{n-2}}.$$

Der Kettenbruch 2), dessen Werth durch $\frac{P_n}{Q_n}$ angedeutet werden möge, entsteht aus dem in 3) dadurch, dafs man a_n+r_n an die Stelle von a_n treten läfst; es ist also

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(a_n+r_n)\,p_{n-1}+b_n p_{n-2}}{(a_n+r_n)\,q_{n-1}+b_n q_{n-2}}$$
$$=\frac{a_n p_{n-1}+b_n p_{n-2}+p_{n-1}r_n}{a_n q_{n-1}+b_n q_{n-2}+q_{n-1}r_n},$$

mithin, wenn man für p_n und q_n ihre Werthe aus 4) setzt,

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{p_n+p_{n-1}r_n}{q_n+q_{n-1}r_n}.$$

Um nun die Differenz der Kettenbrüche 2) und 3) in Rechnung zu bekommen, ziehen wir beiderseits $\frac{p_n}{q_n}$ ab, wodurch bei Reduction auf gleichen Nenner entsteht:

$$5)\qquad \frac{P_n}{Q_n}-\frac{p_n}{q_n}$$
$$=\frac{p_{n-1}q_n r_n-p_n q_{n-1}r_n}{(q_n+q_{n-1}r_n)\,q_n}=-\frac{r_n}{q_n+q_{n-1}r_n}\cdot\frac{p_n q_{n-1}-q_n p_{n-1}}{q_n}.$$

Es ist ferner

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_n q_{n-1}-q_n p_{n-1}}{q_n q_{n-1}},$$

folglich durch beiderseitige Multiplication mit q_{n-1}

$$q_{n-1}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)=\frac{p_n q_{n-1}-q_n p_{n-1}}{q_n}.$$

Hier ist die rechte Seite nichts Anderes, als der zweite Factor in der Gleichung 5). Substituiren wir dort die linke Seite unserer Gleichung für denselben, so wird

$$6)\qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n} = - \frac{q_{n-1} r_n}{q_{n-1} r_n + q_n} \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right).$$

Hier haben wir nun zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Es seien alle in 2) und 3) vorkommenden a, b und r, mithin sämmtliche Glieder und Reste positiv. Dann sind alle p und q positiv und der erste Factor rechts in 6) ist ein echter Bruch, der zweite eine Gröfse, welche beständig abnimmt, ohne dafs sie sich jedoch der Null zu nähern braucht. Soll aber der gefundene Ausdruck sich der Null unbegrenzt nähern, so mufs einer der beiden Factoren selbst die Null zur Grenze haben. Nun läfst sich der erste Factor auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{1 + \frac{q_n}{q_{n-1} r_n}}$$

und wenn diefs die Null zur Grenze haben soll, mufs

$$Lim\, \frac{q_n}{q_{n-1} r_n} = \infty$$

sein. Man hat aber ferner

$$\frac{q_n}{q_{n-1} r_n}$$

$$= \frac{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}}{q_{n-1} r_n} = \frac{a_n}{r_n} + \frac{b_n}{r_n} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}.$$

Hier ist nun ganz sicher $Lim\, \frac{q_n}{q_{n-1} r_n} = \infty$, wenn schon $Lim\, \frac{a_n}{r_n} = \infty$ ist, weil das, was zu $\frac{a_n}{r_n}$ noch hinzukommt, um die Gleichung herzustellen, eine positive Gröfse ist. Die Differenz zwischen den Kettenbrüchen 2) und 3) nähert sich also gewifs der Null, wenn

$$7)\qquad Lim\, \frac{a_n}{r_n} = \infty$$

ist, was entweder dadurch geschehen kann, dafs $Lim\, a_n = \infty$ und $Lim\, r_n$ eine endliche Gröfse ist, oder dadurch, dafs $Lim\, a_n$ von Null verschieden und $Lim\, r_n = 0$ ist, wie wir früher unmittelbar bemerkt haben. Da der erste Factor in 6) ein echter Bruch bleibt, so könnte

$$Lim \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n}\right) = 0$$

auch dann werden, wenn $Lim\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$, d. h. $Lim\, \Delta_{n-1}=0$ würde. Diesen Fall haben wir schon untersucht; er ist derjenige, in welchem der Kettenbruch 3) convergirt. Die Differenz zwischen den Kettenbrüchen 2) und 3) nähert sich auch dann der Null, wenn der letztere convergirt, was immer geschieht, wenn

8) $$Lim\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}>0$$

ist, wie gezeigt wurde.

II. Weniger einfach gestalten sich die Resultate, wenn die Gröſsen b_2, b_3, b_4, ... und r_n negativ, also die Glieder, mit Ausnahme des ersten, negativ sind und die Kettenbrüche 2) und 3) die Form haben:

9) $$\cfrac{b_1}{a_1-\cfrac{b_2}{a_2-\cfrac{b_3}{a_3-\cdots-\cfrac{b_n}{a_n-r_n}}}},$$

10) $$\cfrac{b_1}{a_1-\cfrac{b_2}{a_2-\cfrac{b_3}{a_3-\cdots-\cfrac{b_n}{a_n}}}}.$$

Hier ist dann

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{q_{n-1}r_n}{-q_{n-1}r_n+q_n}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

oder

11) $$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{\frac{q_n}{q_{n-1}r_n}-1}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right).$$

Hieraus ersieht man erstlich, daſs die fragliche Differenz zwischen den Kettenbrüchen 9) und 10) sich der Null nähert, wenn dieſs mit r_n der Fall ist, was wir schon früher unmittelbar bemerkt haben. Es giebt aber noch einen zweiten, günstigeren Fall. Ist nämlich der Kettenbruch 10) ein convergenter, was immer stattfindet, wenn seine einzelnen Glieder echte Brüche sind, so hat man

$$Lim\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)=0.$$

Daraus allein folgt noch nicht, daſs der Ausdruck in 11) sich der Null nähert, weil es geschehen könnte, daſs in dem ersten Factor

$$Lim \frac{q_n}{q_{n-1}\, r_n} = 1,$$

mithin

$$Lim \frac{1}{\frac{q_n}{q_{n-1}\, r_n} - 1} = \infty$$

wäre. Es würde dann der ganze in Rede stehende Ausdruck aus zwei Factoren zusammengesetzt sein, von denen der eine immer zu-, der andere beständig abnähme, und es könnte dann das Product eine endliche Gröſse zur Grenze haben. Wir müssen daher noch darauf sehen, daſs $Lim \frac{q_n}{q_{n-1}\, r_n}$ von der Einheit verschieden sei. Sind nun alle Nenner a gröſser als die Zähler b, was wir der Convergenz wegen voraussetzen müssen, so ist jeder Näherungsnenner q_n gröſser als der vorhergehende q_{n-1} *), mithin $\frac{q_n}{q_{n-1}} > 1$. Dies hindert aber nicht, daſs $Lim \frac{q_n}{q_{n-1}} = 1$ sei (wie z. B. $Lim \frac{m+1}{m}$ für wachsende m). Ferner ist

$$Lim \frac{q_n}{q_{n-1}\, r_n} = Lim \frac{q_n}{q_{n-1}} \cdot Lim \frac{1}{r_n}.$$

Da nun möglicher Weise der erste Factor sich der Einheit nähern

---

*) Der Beweis davon, daſs hier immer $q_n > q_{n-1}$ ist, lautet kurz: Gesetzt, man wüſste schon, daſs $q_{n-1} > q_{n-2}$ sei, so muſs auch

$$q_{n-1} > \frac{b_n}{a_n - 1} q_{n-2}$$

sein. Denn da wir $a_n > b_n$ und beide als ganze Zahlen voraussetzen, so muſs a_n wenigstens um eine Einheit $> b_n$ sein. Wäre im ungünstigsten Falle $a_n = b_n + 1$, so wäre $\frac{b_n}{a_n - 1} = 1$, also die obige Ungleichung richtig; ist aber a_n um mehr als eine Einheit von b_n verschieden, so ist $\frac{b_n}{a_n - 1}$ ein echter Bruch, also q_{n-1} um so mehr gröſser als ein Theil von q_{n-2}, da es schon gröſser als das ganze q_{n-2} vorausgesetzt wird. Aus jener Ungleichheit folgt nun $(a_n - 1)\, q_{n-1} > b_n\, q_{n-2}$ oder $a_n\, q_{n-1} - b_n\, q_{n-2} > q_{n-1}$, oder vermöge des Werthes der linken Seite $q_n > q_{n-1}$. Ist also $q_{n-1} > q_{n-2}$, so ist auch $q_n > q_{n-1}$. Man hat aber $q_1 = a_1$, $q_2 = a_1 a_2 - b_2$; ferner offenbar $a_1 a_2 > a_1 + a_2$, ausgenommen im Falle $a_1 = a_2 = 2$; da aber $a_2 > b_2$ ist, so hat man gewiſs in jedem Falle $a_1 a_2 > a_1 + b_2$, oder $a_1 a_2 - b_2 > a_1$, d. h. $q_2 > q_1$. Nach dem vorher bewiesenen Satze folgt nun für $n = 3$, $q_3 > q_2$, für $n = 4$, $q_4 > q_3$ u. s. f., also überhaupt

$$q_1 < q_2 < q_3 < q_4 \cdots$$

Die Nenner der successiven Näherungsbrüche bilden mithin eine steigende Reihe, w. z. b. w.

kann, so mufs, wenn wir sicher gehen wollen, $Lim\,\frac{1}{r_n}$ von der Einheit verschieden sein. Die Differenz zwischen den Kettenbrüchen 9) und 10) nähert sich also für wachsende n unbegrenzt der Null, wenn der Kettenbruch 10) convergirt, und wenn zugleich in 9) $Lim\, r_n \lesseqgtr 1$ ist.

Capitel XIII.

Die Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche.

§. 69.

Verwandlung einer beliebigen Reihe.

Das Verfahren, dessen wir uns bedient haben, um gewöhnliche Brüche und Quadratwurzeln in Kettenbrüche umzugestalten, kann mit einer kleinen Modification auch auf jede endliche Reihe angewendet werden. Wir betrachten zu dem genannten Zwecke die aus $n+1$ Gliedern bestehende Reihe

$$\frac{1}{t_0}+\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots\cdot+\frac{1}{t_n},$$

und nennen R_k den Rest, welcher bleibt, wenn von dieser Reihe ihre k ersten Glieder weggenommen werden, so dafs also folgende Gleichungen stattfinden

$$R_k=\frac{1}{t_k}+\frac{1}{t_{k+1}}+\cdots\cdot+\frac{1}{t_n},$$

1) $$R_0=\frac{1}{t_0}+\frac{1}{t_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{t_n},$$

2) $$R_n=\frac{1}{t_n}.$$

Die Gröfse R_k besitzt nun, wie leicht zu sehen ist, die Eigenschaft

$$R_k=R_{k+1}+\frac{1}{t_k}=\frac{t_k\,R_{k+1}+1}{t_k};$$

hieraus folgt

$$\frac{1}{R_k}-t=\frac{t_k}{t\;R_{k+1}+1}-t_k=-\frac{(t_k)^2\,R_{k+1}}{t_k\,R_{h+1}+1}$$

und dafür kann geschrieben werden

$$\frac{1}{R_k}-t_k=-\frac{(t_k)^2}{t_k+t_{k+1}+\left(\frac{1}{R_{k+1}}-t_{k+1}\right)}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$3)\qquad \frac{1}{R_k} - t_k = U_k,$$

so geht die vorige Gleichung über in

$$U_k = -\frac{(t_k)^2}{t_k + t_{k+1} + U_{k+1}},$$

es ist mithin der Reihe nach $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$

$$U_0 = -\frac{(t_0)^2}{t_0 + t_1 + U_1},$$

$$U_1 = -\frac{(t_1)^2}{t_1 + t_2 + U_2}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$U_{n-1} = -\frac{(t_{n-1})^2}{t_{n-1} + t_n + U_n}.$$

Substituirt man jede dieser Gleichungen in die vorhergehende und beachtet, dafs nach 1), 2) und 3)

$$U_0 = \frac{1}{R_0} - t_0,$$

$$U_n = \frac{1}{R_n} - t_n = t_n - t_n = 0$$

ist, so erhält man

$$\frac{1}{R_0} = t_0 - \cfrac{(t_0)^2}{t_0 + t_1 - \cfrac{(t_1)^2}{t_1 + t_2 - \cfrac{(t_2)^2}{t_2 + t_3 - \cdots - \cfrac{(t_{n-1})^2}{t_{n-1} + t_n}}}}$$

Hieraus ergiebt sich R_0, indem man beiderseits die reciproken Werthe nimmt, nachher folgt vermöge der Bedeutung von R_0 (No. 1)

$$4)\qquad \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}$$

$$= \cfrac{1}{t_0 - \cfrac{(t_0)^2}{t_0 + t_1 - \cfrac{(t_1)^2}{t_1 + t_2 - \cfrac{(t_2)^2}{t_2 + t_3 - \cdots - \cfrac{(t_{n-1})^2}{t_{n-1} + t_n}}}}}.$$

Diese Formel dient zur Verwandlung einer endlichen Reihe in einen endlichen Kettenbruch. Enthält die Reihe wechselnde Vorzeichen, so ist dasselbe Verfahren anwendbar und giebt

5) $$\frac{1}{t_0}-\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\cdots+\frac{(-1)^n}{t_n}$$

$$=\cfrac{1}{t_0+\cfrac{(t_0)^2}{t_1-t_0+\cfrac{(t_1)^2}{t_2-t_1+\cfrac{(t_2)^2}{t_3-t_2+\cdots+\cfrac{(t_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}}}}},$$

wie man auch kürzer aus der Formel 4) findet, indem man $-t_1$, $-t_3$, $-t_5$ etc. an die Stelle von t_1, t_3, t_5 etc. treten läfst*).

Es hat keine Schwierigkeit, aus den Formeln 4) und 5) noch andere abzuleiten, welche sich auf besondere Voraussetzungen beziehen. Nimmt man z. B.

$$t_0=\frac{a_0}{1},\quad t_1=\frac{a_1}{x},\quad t_2=\frac{a_2}{x^2},\;\ldots.$$

und schafft die Brüche aus den einzelnen Gliedern der Kettenbrüche weg, so findet man:

6) $$\frac{1}{a_0}+\frac{x}{a_1}+\frac{x^2}{a_2}+\cdots+\frac{x^n}{a_n}$$

$$=\cfrac{1}{a_0-\cfrac{(a_0)x}{a_0x+a_1-\cfrac{(a_1)^2x}{a_1x+a_2-\cfrac{(a_2)^2x}{a_2x+a_3-\cdots-\cfrac{(a_{n-1})^2x}{a_{n-1}x+a_n}}}}},$$

7) $$\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_1}+\frac{x^2}{a_2}-\cdots+\frac{(-1)^nx^n}{a_n}$$

$$=\cfrac{1}{a_0+\cfrac{(a_0)^2x}{a_1-a_0x+\cfrac{(a_1)^2x}{a_2-a_1x+\cfrac{(a_2)^2x}{a_3-a_2x+\cdots+\cfrac{(a_{n-1})^2x}{a_n-a_{n-1}x}}}}}.$$

Für $a_0=\alpha_0$, $a_1=\alpha_0\alpha_1$, $a_2=\alpha_0\alpha_1\alpha_2$ u. s. f. ergiebt sich hieraus nach gehöriger Hebung

8) $$\frac{1}{\alpha_0}+\frac{x}{\alpha_0\alpha_1}+\frac{x^2}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}+\cdots+\frac{x^n}{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}$$

$$=\cfrac{1}{\alpha_0-\cfrac{\alpha_0x}{\alpha_1+x-\cfrac{\alpha_1x}{\alpha_2+x-\cfrac{\alpha_2x}{\alpha_3+x-\cdots-\cfrac{\alpha_{n-1}x}{\alpha_n+x}}}}};$$

*) Euler, *Opuscula analytica*, T. II, p. 148.

9) $$\frac{1}{\alpha_0} - \frac{x}{\alpha_0\alpha_1} + \frac{x^2}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n}$$
$$= \cfrac{1}{\alpha_0 + \cfrac{\alpha_0 x}{\alpha_1 - x + \cfrac{\alpha_1 x}{\alpha_2 - x + \cfrac{\alpha_2 x}{\alpha_3 - x + \dots + \cfrac{\alpha_{n-1} x}{\alpha_n - x}}}}}.$$

Nimmt man beispielsweis in der Formel 8)

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{n}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{n-1}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{n-2}, \dots$$

so steht linker Hand die binomische Reihe; setzt man dafür ihre Summe $(1 + x)^n$ und schafft rechter Hand die Brüche weg, so findet sich

10) $$(1 + x)^n$$
$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{nx}{nx + 1 - \cfrac{1.(n-1)x}{(n-1)x + 2 - \cfrac{2.(n-2)x}{(n-2)x + 3 - \dots - \cfrac{(n-1).1x}{1x + n}}}}}.$$

Aus den bisherigen Kettenbrüchen für endliche Reihen lassen sich unmittelbar Kettenbrüche für unendliche Reihen herleiten, indem man die Zahl $n + 1$, welche die Anzahl der Reihenglieder und ebenso der Kettenbruchglieder bestimmt, ins Unendliche wachsen läſst. Eine besondere Vorsicht hierbei ist nicht nöthig, denn jeder Näherungsbruch des Kettenbruches bildet den Repräsentanten von so viel Gliedern der Reihe, als er selbst Glieder enthält; convergirt also die unendliche Reihe, so muſs der Kettenbruch ebenfalls convergiren, und auf gleiche Weise zieht die Divergenz der Reihe die Divergenz des Kettenbruches nach sich.

Aus No. 8) erhält man z. B. für $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \dots = y$ linker Hand die Reihe

$$1 + \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \dots + \left(\frac{x}{y}\right)^n,$$

welche unter der Bedingung $y^2 > x^2$ ins Unendliche fortgesetzt und summirt werden kann; dieſs giebt

$$\frac{y}{y-x} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{y + x - \cfrac{yx}{y + x - \cfrac{yx}{y + x - \dots}}}}$$

oder, wenn man die reciproken Werthe nimmt,

$$11) \qquad x = \cfrac{yx}{y + x - \cfrac{yx}{y + x - \cfrac{yx}{y + x - \ldots}}}, \quad y^2 > x^2.$$

Durch die nämlichen Substitutionen und unter derselben Bedingung ergiebt sich aus No. 9)

$$12) \qquad x = \cfrac{yx}{y - x + \cfrac{yx}{y - x + \cfrac{yx}{y - x + \ldots}}}, \quad y^2 > x^2.$$

Setzt man in No. 11)

$$y = a + \sqrt{a^2 - b}, \quad x = a - \sqrt{a^2 - b},$$

wobei sowohl a als b positiv und $b < a^2$ sein möge, so ist die Bedingung $y^2 > x^2$ erfüllt und es folgt

$$13) \quad \sqrt{a^2 - b} = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \ldots}}} \qquad a > 0, \; a^2 > b > 0.$$

Ein ähnliches Resultat liefert die Gleichung 12) für

$$y = \sqrt{a^2 + b} + a, \quad x = \sqrt{a^2 + b} - a$$

wenn $a > b > 0$ ist, nämlich

$$14) \qquad \sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}}, \qquad a > b > 0.$$

Die beiden letzten Formeln lassen sich in eine einzige zusammenfassen, welche für positive und negative b gilt wenn a und $a^2 + b$ positiv sind.

Als zweites Beispiel für die Gleichung 8) diene die Annahme $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, etc.; für $n = \infty$ entsteht dann linker Hand die Exponentialreihe, mithin ist für jedes endliche x

$$15) \qquad e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + x - \cfrac{1x}{2 + x - \cfrac{2x}{3 + x - \ldots}}}}$$

Nimmt man in No. 7) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$ etc., $n = \alpha$, $x = z^2$ und multiplicirt beiderseits mit z, so erhält man

16) $$\operatorname{arctan} z = \cfrac{z}{1 + \cfrac{(1z)^2}{3 - 1z^2 + \cfrac{(3z)^2}{5 - 3z^2 + \cfrac{(5z)^2}{7 - 5z^2 + \ldots}}}} \qquad z^2 \overline{\lessgtr} 1.$$

Für $z = 1$ folgt hieraus die Gleichung*)

17) $$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots}}}}$$

welche die Umsetzung der Leibnitz'schen Reihe in einen Kettenbruch darstellt, der natürlich ebenso langsam convergirt wie jene Reihe.

Noch wollen wir bemerken, dafs sich jetzt auch Kettenbrüche angeben lassen, bei denen die Näherungsbrüche ungerader Ordnung gegen eine andere Grenze convergiren als die Näherungsbrüche gerader Ordnung, während beide Grenzwerthe endliche Gröfsen sind. Man gelangt hierzu, wenn man eine oscillirende Reihe in einen Kettenbruch verwandelt. So ergiebt sich z. B. aus No. 5)

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \ldots$$

$$= \cfrac{2}{1 + \cfrac{1^3 . 3}{1 + \cfrac{2^3 . 4}{1 + \cfrac{3^3 . 5}{1 + \cfrac{4^3 . 6}{1 + \ldots}}}}}$$

und da die Reihe zwischen $1 + l2$ und $l2$ oscillirt (§. 29), so convergiren die Näherungsbrüche ungerader Ordnung durch Abnahme gegen die Grenze $1 + l2$, die Näherungsbrüche gerader Ordnung durch Zunahme gegen die Grenze $l2$. Derartige Kettenbrüche hat man oscillirende Kettenbrüche genannt.

§. 70.

Verwandlung einer Reihe von besonderer Form.

Bei den Untersuchungen des vorigen Paragraphen blieb die Reihe, um deren Verwandlung in einen Kettenbruch es sich handelte, völlig allgemein; ist dieselbe aber von besonderer Form, so können besondere Methoden angewendet werden. In dieser Beziehung ist die Reihe

*) Nach Angabe von Wallis (*Arithmetica infinitorum*) ist dieselbe von Brounker gefunden worden.

$$1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \,.\, \beta(\beta+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \,.\, \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

von Interesse, welche die meisten der in der algebraischen Analysis vorkommenden Reihen als specielle Fälle in sich enthält. Sie convergirt für alle x, deren absoluter Werth weniger als die Einheit beträgt, wie auch sonst α, β und γ beschaffen sein mögen; für $x = 1$ convergirt sie unter der Bedingung $\gamma > \alpha + \beta$ (§. 27). Unter Voraussetzung ihrer Convergenz bezeichnen wir ihre Summe mit $F(\alpha, \beta, \gamma)$, so dafs die Gleichung

$$1)\quad F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \,.\, \beta(\beta+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \,.\, \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

stattfindet; es ist dann auf gleiche Weise

$$2)\quad F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) = 1 + \frac{\alpha \,.\, (\beta+1)}{1 \,.\, (\gamma+1)} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \,.\, (\beta+1)(\beta+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, (\gamma+1)(\gamma+2)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \,.\, (\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, (\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)} x^3 + \dots$$

und wenn man hiervon die Gleichung 1) abzieht, so ergiebt sich, dafs die Differenz der beiden obigen Reihen wiederum eine Reihe von derselben Form ist. Man hat nämlich

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) - F(\alpha, \beta, \gamma) =$$
$$\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)} \left[1 + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{1 \,.\, (\gamma+2)} x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, (\gamma+2)(\gamma+3)} x^2 + \dots\right]$$

d. i.

$$3)\quad F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) - F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2).$$

Diese Eigenschaft läfst sich benutzen, um zunächst den Quotienten der Reihen 1) und 2) und dann die Reihe 2) oder 1) selbst in einen Kettenbruch zu verwandeln*). Man erhält nämlich aus der Gleichung 3) durch Division mit $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)$ sehr leicht

$$4)\quad 1 - \frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)} = \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{1}{\dfrac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)}}.$$

Hier setzen wir der Kürze wegen

$$5)\quad \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)} = f(\alpha, \beta, \gamma)$$

---

*) Gaufs, *Disquisitio circa seriem infinitam* in den Abhandlungen der Göttinger Gesellsch. d. Wissensch. Bd. II, 1812.

und

$$6)\qquad \frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}=\psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma).$$

Wollen wir durch Einführung dieser Abkürzungen die Gleichung 4) in die möglichst bequeme Form bringen, so wird es zuvörderst nöthig, den auf der rechten Seite dort vorkommenden Quotienten

$$\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}$$

ebenfalls durch die Function ψ auszudrücken. Vertauschen wir zu diesem Zwecke die Gröfsen α und β in der Gleichung 6), so erhalten wir

$$7)\qquad \psi(\beta,\ \alpha,\ \gamma)=\frac{F(\beta,\ \alpha,\ \gamma)}{F(\beta,\ \alpha+1,\ \gamma+1)}.$$

Da die Gröfsen α und β in $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ symmetrisch vorkommen, so kann man sie ihre Plätze wechseln lassen, ohne dafs $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ seinen Werth ändert; in der That ist

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2+\dots$$
$$=1+\frac{\beta\alpha}{1\,.\,\gamma}x+\frac{\beta(\beta+1)\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2+\dots$$

d. h. $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=F(\beta,\ \alpha,\ \gamma)$ und aus demselben Grunde hat man auch $F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma+1)=F(\beta,\ \alpha+1,\ \gamma+1)$. Unter Benutzung dieser Resultate geht die Gleichung 7) in die nachstehende über:

$$\psi(\beta,\ \alpha,\ \gamma)=\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma+1)},$$

aus welcher dadurch, dafs man $\beta+1$ und $\gamma+1$ für β und γ setzt, die folgende entspringt:

$$\psi(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)=\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}.$$

Der hier stehende Quotient ist derselbe, welcher auf der rechten Seite der Gleichung 4) vorkommt; substituiren wir seinen Werth dort, so ergiebt sich wegen der Abkürzungen in 5) und 6)

$$1-\psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\,\frac{1}{\psi(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}$$

oder

$$8)\qquad \psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=1-\frac{f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{\psi(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}.$$

Setzt man hier für $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ der Reihe nach $\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1$, so wird

$$9)\qquad \psi(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)=1-\frac{f(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}{\psi(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}.$$

Substituirt man ferner in 8) $\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2$ für $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, so ist

$$10)\quad \psi(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)=1-\frac{f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}{\psi(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)}$$

und wenn man für α, β, γ in 8) der Reihe nach $\beta+2$, $\alpha+1$, $\gamma+3$ einführt,

$$11)\quad \psi(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)=-\frac{f(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)}{\psi(\alpha+2,\ \beta+2,\ \gamma+4)}.$$

Man kann auf diese Weise beliebig weit gehen.

Will man nach einer gefundenen Gleichung eine weitere bringen, so substituirt man in die Gleichung 8) für α, β, γ der Reihe nach diejenigen Gröfsen und in der Ordnung, wie sie im Nenner auf der rechten Seite der schon gefundenen Gleichung hinter ψ stehen. Ein paar allgemeine auf einander folgende Gleichungen dieser Art würden sein:

$$12)\quad \psi(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n)=1-\frac{f(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n)}{\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)},$$

$$13)\quad \psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)=1-\frac{f(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}{\psi(\alpha+n+1,\beta+n+1,\gamma+2n+2)},$$

von welchen die erste als allgemeiner Typus für die Gleichungen 8) und 10), die zweite für 9) und 11) gilt.

Substituirt man in jede dieser Gleichungen die nächste, indem man bei 8) anfängt und etwa bei 12) aufhört, so wird

$$\psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=1-\cfrac{f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{1-\cfrac{f(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}{1-\cfrac{f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}{1-\cfrac{f(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)}{1-\ddots-\cfrac{f(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n)}{\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}}}}}.$$

Vermöge der Bedeutung von $\psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ ist nun

$$\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}=\frac{1}{\psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)},$$

folglich

$$14)\quad \frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}$$

$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{1-\cfrac{f(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}{1-\cfrac{f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}{1-\cfrac{f(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)}{1-\ddots-\cfrac{f(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n)}{\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}}}}}}$$

und dabei sind die verschiedenen Werthe der mit f bezeichneten Function nach 5) folgende:

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x$$

$$f(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1) = \frac{(\beta+1)\ (\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)\ (\gamma+2)}x$$

$$f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2) = \frac{(\alpha+1)\ (\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)\ (\gamma+3)}x$$

$$f(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3) = \frac{(\beta+2)\ (\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)\ (\gamma+4)}x$$

u. s. f.

deren Gesetz leicht zu übersehen ist.

Um den Kettenbruch 14) ins Unendliche fortsetzen zu können, ist zuvörderst noch eine Bemerkung nöthig. Der fragliche Kettenbruch steht unter der Form

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{k_0}{1-\cfrac{k_1}{1-\cfrac{k_2}{1-\ddots-\cfrac{k_{2n}}{\varrho_{2n}}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{k_0}{1-\cfrac{k_1}{1-\cfrac{k_2}{1-\ddots-\cfrac{k_{2n}}{1-(1-\varrho_{2n})}}}}}.$$

Setzen wir hier $1-\varrho_{2n}=r_{2n}$, so geht der Kettenbruch ganz in die Form des Kettenbruches 9) in §. 68 über, und es ist erlaubt, den Rest r_{2n} wegzulassen, wenn sich derselbe für wachsende n unbegrenzt der Null nähert, d. h. wenn

$$Lim\ \varrho_{2n} = 1$$

ist. Dieser Umstand findet in der That statt; es ist nämlich

$$\varrho_{2n} = \psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1 = \frac{F(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}{F(\beta+n+1,\ \alpha+n+1,\ \gamma+2n+2)}$$

$$= \frac{F(\alpha+n,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+1)}{F(\alpha+n+1,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+2)}$$

$$= \frac{1+\dfrac{(\alpha+n)\ (\beta+n+1)}{1\,.\,(\gamma+2n+1)}x+\dfrac{(\alpha+n)\,(\alpha+n+1)\,(\beta+n+1)\,(\beta+n+2)}{1\,.\,2\,.\,(\gamma+2n+1)\ (\gamma+2n+2)}x^2+\cdots}{1+\dfrac{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{1\,.\,(\gamma+2n+2)}x+\dfrac{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(\beta+n+1)(\beta+n+2)}{1\,.\,2\,.\,(\gamma+2n+2)\ (\gamma+2n+3)}x^2+\cdots}$$

und um diesen Quotienten genauer untersuchen zu können, erinnern wir an die Definition der sogenannten Mittelgröfse zwischen gegebenen Gröfsen. Sind nämlich $a, b, c, d, \ldots$ beliebige gegebene Zahlen, die wir der Einfachheit wegen als sämmtlich positiv voraussetzen wollen, und nennen wir g die gröfste und k die kleinste derselben, so heifst Mittelgröfse zwischen $a, b, c, d, \ldots$ jede Zahl, die nicht gröfser als g und nicht kleiner als k ist, und sie wird durch $M(a, b, c, d, \ldots)$ bezeichnet. Von diesen Mittelgröfsen gilt der Satz*)

$$\frac{B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + \cdots}{A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots} = M\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \frac{B_2}{A_2}, \frac{B_3}{A_3}, \ldots\right)$$

vorausgesetzt, dafs der linker Hand verzeichnete Quotient im Zähler und Nenner gleichviel Glieder enthält. Nehmen wir n so grofs, dafs $\alpha + n$, $\beta + n$ und $\gamma + n$ sämmtlich positiv ausfallen, so giebt die Anwendung dieses Satzes

$$\varrho_{2n} = M\left[1, \frac{(\alpha+n)(\gamma+2n+2)}{(\alpha+n+1)(\gamma+2n-1)}, \frac{(\alpha+n)(\gamma+2n+3)}{(\alpha+n+2)(\gamma+2n+2)}, \ldots\right]$$

---

*) Der Beweis derselben lautet: Nennen wir G den gröfsten und K den kleinsten unter den Quotienten $\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \frac{B_2}{A_2}$ etc., indem wir dieselben als positiv voraussetzen, so sind die Differenzen

$$G - \frac{B_0}{A_0}, \quad G - \frac{B_1}{A_1}, \quad G - \frac{B_2}{A_2}, \ldots .$$

und

$$\frac{B_0}{A_0} - K; \quad \frac{B_1}{A_1} - K, \quad \frac{B_2}{A_2} - K, \ldots .$$

sämmtlich positiv. Dasselbe gilt noch, wenn man diese Differenzen mit den Factoren $A_1, A_2, A_3, \ldots$ multiplicirt; demnach sind die Ausdrücke

$$A_0G - B_0, \quad A_1G - B_1, \quad A_2G - B_2, \quad \ldots .$$
$$B_0 - A_0K, \quad B_1 - A_1K, \quad B_2 - A_2K, \quad \ldots .$$

positiv und ebenso sind es ihre Summen. Man hat demnach durch Vereinigung der in jeder Horizontalreihe befindlichen Differenzen

$$(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots)\, G - (B_0 + B_1 + B_2 + \ldots) > 0$$
$$(B_0 + B_1 + B_2 + \ldots) - (A_0 + A_1 + A_2 + \ldots)\, K > 0$$

und hieraus findet man aus der Stelle

$$G > \frac{B_0 + B_1 + B_2 + \ldots}{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots},$$
$$K < \frac{B_0 + B_1 + B_2 + \ldots}{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots},$$

was mit der im Text stehenden Behauptung identisch wird, wenn man die erwähnte Bezeichnung der Mittelgröfsen anwendet.

und wenn nun n unendlich wächst,

$$Lim\, \varrho_{2n} = M[1,\ 1,\ 1,\ \ldots]$$

d. h. $Lim\, \varrho_{2n} = 1$. Wir sind demnach berechtigt, den unter No. 14) verzeichneten Kettenbruch ins Unendliche fortzusetzen; vermöge der Bedeutung der Function f giebt diefs

$$15)\qquad \frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}}{1 - \cfrac{\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1 - \cfrac{\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)x}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1 - \cfrac{\frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)x}{(\gamma+3)(\gamma+4)}}{1 - \ldots\ldots\ldots\ldots}}}}}$$

und dieses Resultat ist so lange richtig, als die mit $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ und $F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)$ bezeichneten Reihen convergiren.

Aus dieser sehr allgemeinen Relation lassen sich neue Kettenbrüche für die wichtigsten in der algebraischen Analysis vorkommenden Functionen ableiten.

§. 71.

Kettenbrüche für einige der wichtigsten Functionen.

I. Nehmen wir in Formel 15) $\beta = 0$, so wird $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = 1$ und es bleibt der Zähler allein stehen; diefs giebt

$$1 + \frac{\alpha}{\gamma+1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}x^3 + \ldots$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{\alpha}{\gamma+1}x}{1 - \cfrac{\frac{1\,.\,(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x}{1 - \cfrac{\frac{(\alpha+1)(\gamma+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}x}{1 - \cfrac{\frac{2\,.\,(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}x}{1 - \ldots\ldots\ldots}}}}}$$

und nach Wegschaffung der Doppelbrüche

1) $$1+\frac{\alpha}{\gamma+1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}x^3+\dots$$
$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{\alpha x}{\gamma+1-\cfrac{1(\gamma+1-\alpha)x}{\gamma+2-\cfrac{(\alpha+1)(\gamma+1)x}{\gamma+3-\cfrac{2(\gamma+2-\alpha)x}{\gamma+4-\cfrac{(\alpha+2)(\gamma+2)x}{\gamma+5-\dots\dots}}}}}}$$

In dem speciellen Falle $\alpha=-\mu$, $\gamma=0$, $x=-z$ erhält man linker Hand die Binomialreihe, mithin

2) $$(1+z)^\mu=\cfrac{1}{1-\cfrac{\mu z}{1+\cfrac{1(\mu+1)z}{2-\cfrac{1(\mu-1)z}{3+\cfrac{2(\mu+2)z}{4-\cfrac{2(\mu-2)z}{5+\cfrac{3(\mu+3)z}{6-\dots\dots}}}}}}}$$

und zwar gilt diese Gleichung für jedes z, wenn μ eine ganze positive Zahl ist, aufserdem nur für solche z, bei denen die Reihe convergirt.

Nimmt man in der vorliegenden Gleichung $z=\frac{x}{\mu}$ und geht zur Grenze für unendlich wachsende μ über, so gelangt man zu folgendem Resultate

$$e^x=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{1x}{2-\cfrac{1x}{3+\cfrac{2x}{4-\cfrac{2x}{5+\cfrac{3x}{6-\cfrac{3x}{7+\dots}}}}}}}}$$

wofür einfacher geschrieben werden kann

3) $$e^x=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{5+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{7+\dots}}}}}}}}$$

Aus No. 1) ergiebt sich ferner für $\alpha = \gamma = 1$, $x = -z$ und durch beiderseitige Multiplication mit z

4) $$l(1+z) = \cfrac{z}{1 + \cfrac{1^2 z}{2 + \cfrac{1^2 z}{3 + \cfrac{2^2 z}{4 + \cfrac{2^2 z}{5 + \cfrac{3^2 z}{6 + \cfrac{3^2 z}{7 + \dots}}}}}}}$$

wobei z an die Bedingung $-1 < z \leqq +1$ gebunden ist.

Nimmt man in No. 1) $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$, $x = z^2$ und multiplicirt beiderseits mit z, so erhält man unter der Voraussetzung $-1 < z < +1$

5) $$\tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \cfrac{z}{1 - \cfrac{1^2 z^2}{3 - \cfrac{2^2 z^2}{5 - \cfrac{3^2 z^2}{7 - \cfrac{4^2 z^2}{9 - \dots}}}}}$$

Läfst man $z\sqrt{-1}$ an die Stelle von z treten, so hat man weiter, falls $-1 \leqq z \leqq 1$ ist,

6) $$\operatorname{arctan} z = \cfrac{z}{1 + \cfrac{1^2 z^2}{3 + \cfrac{2^2 z^2}{5 + \cfrac{3^2 z^2}{7 + \cfrac{4^2 z^2}{9 + \dots}}}}}$$

und z. B. für $z = 1$

7) $$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \dots}}}}}$$

II. Kehren wir wieder zu der Gleichung 15) in §. 70 zurück und setzen dort $\frac{x^2}{\alpha\beta}$ für x, so haben wir

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)\,x^4}{1 \,.\, 2 \cdot \gamma(\gamma+1)\,\alpha^2\beta^2} + \dots$$

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) = 1 + \frac{(\beta+1)x^2}{1 \cdot (\gamma+1)\beta} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)x^4}{1 \,.\, 2 \cdot (\gamma+1)(\gamma+2)\,\alpha^2\beta^2} + \dots$$

Nehmen wir hier $\beta = \alpha$, lassen dann α ins Unendliche wachsen und

nennen U und V die Grenzwerthe der Reihensummen für unendlich wachsende α, so ist

$$8)\qquad U = 1 + \frac{x^2}{1 \,.\, \gamma} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma(\gamma+1)} + \frac{x^6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots,$$

$$9)\quad V = 1 + \frac{x^2}{1 \,.\, (\gamma+1)} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, (\gamma+1)(\gamma+2)} + \frac{x^6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, (\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)} + \cdots$$

und wenn wir auch im Kettenbruche $\frac{x^2}{\alpha\beta}$ für x setzen, darauf $\beta = \alpha$ ins Unendliche wachsen lassen,

$$\frac{V}{U} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)}}{1 + \cfrac{\frac{x^2}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1 + \cfrac{\frac{x^2}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1 + \cdots\cdots\cdots}}}},$$

woraus nach Wegschaffung der Brüche folgt

$$10)\qquad \frac{V}{U} = \cfrac{\gamma}{\gamma + \cfrac{x^2}{\gamma + 1 + \cfrac{x^2}{\gamma + 2 + \cfrac{x^2}{\gamma + 3 + \cdots}}}}$$

Eine wichtige Substitution ist hier $\gamma = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}x$ für x. Man erhält durch dieselbe

$$U = 1 + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 2^2} + \frac{x^6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2^2} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \frac{x^6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} + \cdots$$

d. i.

$$U = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ferner

$$V = 1 + \frac{x^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2^2} + \frac{x^6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 2^3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} + \frac{x^6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7} + \cdots$$

oder

$$U = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}.$$

Setzt man auch in dem Kettenbruche $\gamma = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}x$ für x, schafft

die Brüche weg und substituirt für U und V die gefundenen Werthe, so wird

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x(e^x + e^{-x})} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \dots}}}},$$

oder

11) $$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \dots}}}}.$$

Hieraus folgt noch, wenn man $x\sqrt{-1}$ für x eintreten läſst,

12) $$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \dots}}}}.$$

Die letzten zwei Gleichungen sind besonders merkwürdig und bieten auſserdem noch durch ihre Form den Vortheil dar, daſs man aus ihnen mittelst des in §. 67 bewiesenen Theoremes etwas Näheres über die irrationalen Werthe von e^x und $\tan x$ erfahren kann. Bevor wir aber diese specielleren Consequenzen ziehen, schalten wir erst eine allgemeinere Bemerkung ein, deren Zweck in der Erklärung des Unterschiedes besteht, welcher zwischen den hier gegebenen und den früher in §. 69 entwickelten Kettenbrüchen stattfindet. Es läſst sich dieſs am anschaulichsten machen, wenn man die beiden für $\arctan z$ gefundenen Kettenbrüche No. 11) in §. 69 und No. 6) dieses Paragraphen vergleicht. Die Näherungsbrüche jenes Kettenbruches sind:

$$\frac{z}{1}, \quad \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 - z^2}} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3},$$

$$\cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 - z^2 + \cfrac{9z^2}{5 - 3z^2}}} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5},$$

u. s. w.

und sie repräsentiren immer so viel Glieder der Reihe, als sie selbst Glieder enthalten. Der Kettenbruch 6) dagegen giebt

$$\frac{z}{1}, \quad \frac{z}{1+\frac{z^2}{3}} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{3^2} - \dots$$

$$\frac{z}{1+\frac{z^2}{3+\frac{4z^2}{5}}} = \frac{z+\frac{4}{15}z^2}{1+\frac{9}{15}z^2} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{3z^7}{25} + \dots$$

u. s. w.

Die einzelnen Näherungsbrüche sind hier die Stellvertreter von unendlichen Reihen, die in so viel Gliedern mit der gegebenen Reihe übereinstimmen, als der Näherungsbruch Glieder enthält. Dieselbe Bemerkung wiederholt sich für alle Kettenbrüche der §§. 70 und 71, und darin liegt der wesentliche Unterschied zwischen den früheren und den jetzigen Verwandlungen der Reihen in Kettenbrüche.

§. 72.

Die Irrationalität der natürlichen Logarithmen und der Ludolph'schen Zahl.

I. Setzt man in der Gleichung 11) $x =$ einer rationalen Gröfse $\frac{m}{n}$, gleichviel ob gebrochen oder nicht, und bemerkt, dafs

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

ist, so wird

$$1 - \frac{2}{e^{\frac{2m}{n}}+1} = \frac{\frac{m}{n}}{1+\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{3+\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{5+\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{7+\dots\dots}}}},$$

woraus sich nach Wegschaffung der Brüche in den einzelnen Gliedern des Kettenbruches leicht die Relation

$$1) \qquad \frac{2}{e^{\frac{2m}{n}}+1} = 1 - \frac{m}{n+\frac{m^2}{3n+\frac{m^2}{5n+\frac{m^2}{7n+\dots}}}}$$

ergiebt. Da in dem Kettenbruche die Zähler der einzelnen Glieder

immer $= m^2$ sind, die Nenner dagegen fortwährend wachsen, so mufs früher oder später in demselben eine Stelle kommen, von welcher aus, abwärts gerechnet, alle Glieder des noch folgenden Kettenbruches echte Brüche sind. Der Grenzwerth eines solchen Kettenbruches ist nach §. 67 irrational, folglich ist es dann auch der Grenzwerth des in 1) stehenden Kettenbruches, weil jedenfalls ein Theil desselben irrational sein mufs. Hieraus folgt unmittelbar die Irrationalität der linken Seite in der Gleichung 1) und diefs führt zu dem Satze, dafs für jedes rationale m und n die Potenz $e^{\frac{m}{n}}$ irrational ist.

Nehmen wir einfacher $n = 1$, so entspringt der merkwürdige Satz, dafs alle ganzen Potenzen der Grundzahl der natürlichen Logarithmen irrationale Gröfsen sind. In der Gleichung $e^z = y$ ist daher y irrational, wenn z rational ist; soll aber y rational werden, so mufs $z = log\, y$ irrational sein. Das natürliche Logarithmensystem hat also die merkwürdige Eigenschaft, dafs die Logarithmen aller rationalen Zahlen irrational sind, und hierdurch unterscheidet sich dasselbe wesentlich von allen anderen Systemen, die entweder rationale ganze Zahlen, oder algebraische Wurzeln aus solchen zu Grundzahlen haben; weil in jedem dieser möglichen Systeme rationale Zahlen vorkommen müssen, zu denen auch rationale Logarithmen gehören.

II. Setzt man in der Gleichung 12) des vorigen Paragraphen $x = \frac{m}{n}$, so ergiebt sich leicht

$$2)\qquad tan\,\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \dots}}}}$$

Hier können ganz ähnliche Betrachtungen gemacht werden. Es mufs nämlich irgend eine Stelle kommen, von welcher abwärts alle Glieder des noch folgenden Kettenbruches echte Brüche sind; auch tritt hier der Fall nicht ein, dafs von irgendwo an der Kettenbruch die Form

$$\cfrac{m^2}{m^2 + 1 - \cfrac{m^2}{m^2 + 1 - \dots}}$$

haben könnte, weil die Nenner $n, 3n, 5n, 7n$ u. s. f. ins Unendliche wachsen. Bezeichnen also m und n rationale Zahlen, so ist nach §. 67 der Grenzwerth des Kettenbruches rechts irrational und mit-

hin ist es auch die linke Seite; d. h. die Tangente eines Bogens, welcher zum Halbmesser in einem rationalen Verhältnisse steht, ist incommensurabel mit dem Halbmesser*).

Hieraus folgt sehr leicht, dafs die Ludolph'sche Zahl π eine Irrationalzahl ist. Nach §. 71 Formel 12) ist nämlich für $x = \frac{\pi}{4}$

$$1 = \cfrac{\frac{\pi}{4}}{1 - \cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{3 - \cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{5 - \cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{7 - \ldots}}}}.$$

Wäre nun $\frac{\pi}{4}$ gleich einem rationalen Bruche des Halbmessers, etwa $\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$, so würde daraus folgen

$$1 = \cfrac{m}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{3 - \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{5 - \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{7 - \ldots}}}} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \ldots}}}}$$

Aber der Grenzwerth dieses Kettenbruches ist irrational und kann daher der rationalen Einheit nicht gleich sein. Daraus folgt, dafs die Voraussetzung $\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$ falsch war und demnach $\frac{\pi}{4}$, mithin auch π selbst, incommensurabel gegen den Halbmesser ist.

Man kann noch zeigen, dafs π^2 irrational ist. Aus Formel 12) §. 71 folgt nämlich vermöge der Relation $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

$$x \cot x = 1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}$$

oder

*) Légendre, *Eléments de géométrie*, Note IV.

$$1 - x \cot x = \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}$$

und hieraus für $x = \frac{\pi}{2}$

$$1 = \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3 - \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{5 - \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{7 - \ldots}}}$$

Wäre nun $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ rational $= \frac{p}{q}$, so würde daraus folgen

$$1 = \cfrac{p}{3q - \cfrac{pq}{5q - \cfrac{pq}{7q - \ldots}}}.$$

Der Grenzwerth dieses Kettenbruches ist aber irrational und kann nicht $= 1$ sein. Mithin ist auch $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ nicht rational, d. h. π^2 irrational.

Schlussbetrachtung.

Überblicken wir noch einmal die Gesammtheit der entwickelten Resultate, indem wir wiederum den anfangs aufgestellten Unterschied zwischen unabhängigen und abhängigen veränderlichen Zahlen hinzubringen, so sind es hauptsächlich zwei Bemerkungen, die sich, als besonderer Aufmerksamkeit werth, hervorheben lassen.

I. Es war das Geschäft der Buchstabenrechnung, nachzuweisen, dafs das Zahlengebiet als ein in seiner Längenrichtung (von $-\infty$ bis $+\infty$) continuirlich fortgehendes betrachtet werden kann und dafs sich mit diesen Zahlen die sieben algebraischen Operationen ausführen lassen. Nur bei den imaginären Zahlen stöfst die Buchstabenrechnung auf eine nicht so unmittelbar zu beseitigende Schwierigkeit. Diesen Mangel ergänzt die algebraische Analysis, indem sie die eigentliche Bedeutung der imaginären oder besser complexen Zahlen hervorhebt (§. 59) und die Regeln für die Rechnung mit densel-

ben feststellt. Es zeigt sich, dafs das Zahlengebiet nicht aus einer, sondern aus zwei Dimensionen besteht, und es ist dieses Resultat um so bemerkenswerther, als damit eine eigenthümliche Verbindung zwischen den verschiedenen Formen der mathematischen Erkenntnifs hergestellt werden kann. Betrachten wir nämlich die Dinge der Aufsenwelt von ihrer mathematischen Seite, so sind sie einer dreifachen Auffassungsweise fähig; wir denken uns dieselben entweder nach einander an verschiedenen Stellen der Zeit, oder schematisch geordnet, indem wir ihre Stellen durch Zahlen bezeichnen, oder endlich nebeneinander an verschiedenen Stellen des Raumes; das Eigenthümliche dabei ist, dafs die Zeit eine, das Zahlengebiet zwei und der Raum drei Dimensionen umfafst.

II. Für die abhängigen Variabelen, also für die Functionen gelten zwei Bemerkungen, von denen sich eine auf den Inhalt der gestellten Aufgabe, die andere auf die Form bezieht, in der wir sie gelöst haben.

Die Aufgabe lautete: „eine Theorie der einfachen Functionen

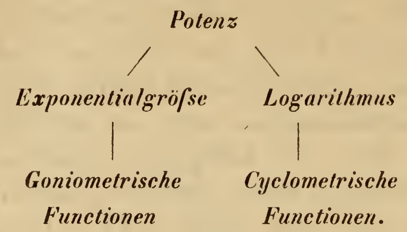
$$x^a,\ a^x,\ log\ x;\ sin\ x,\ cos\ x,\ tan\ x,\ cot\ x,\ sec\ x,\ csc\ x;$$
$$arcsin\ x,\ arccos\ x,\ arctan\ x,\ arccot\ x,$$

zu liefern;“ es war kein ursprünglich bekannter organischer Zusammenhang zwischen jenen Functionen, der uns veranlafste, aus der unendlichen Menge möglicher Functionen gerade die obigen herauszugreifen und einer specielleren Betrachtung zu unterwerfen, es war nur die äufserliche Thatsache, dafs sie es sind, welche in der Elementarmathematik (Arithmetik wie Geometrie) einzig und allein vorkommen. Dagegen hat uns die nunmehr beendete Untersuchung gezeigt, wie nahe jene Functionen einander verwandt sind, sie hat die Willkür, welche in der Wahl des Themas zu liegen schien, durch den Nachweis gerechtfertigt, dafs die genannten Functionen eine nothwendig zusammengehörende Gruppe bilden, sie hat endlich die Mittel geliefert, um den Übergang von der einen Function zur anderen bewerkstelligen zu können. Fangen wir nämlich mit der Potenz an, so können wir aus ihr sowohl die Exponentialgröfse als den Logarithmus ableiten, und es bedarf hierzu nur der Formeln

$$Lim \left\{(1+\delta z)^{\frac{1}{\delta}}\right\} = e^z, \quad Lim \frac{z^\delta - 1}{\delta} = lz.$$

Mittelst der complexen Zahlen gelangt man von der Exponentialgröfse zu den trigonometrischen Functionen und andererseits von dem Logarithmus zu den cyclometrischen Functionen, so dafs sich der Zu-

sammenhang zwischen den Functionen der algebraischen Analysis in folgendem Schema darstellen läfst:



Die einander gegenüberstehenden Functionen sind die Umkehrungen von einander; bei der Potenz fällt die Umkehrung mit ihr selbst zusammen, weil der Ausdruck x^a ebensowohl x^m als $\sqrt[m]{x}$ in sich enthält.

Was endlich die Form anbelangt, unter der irgend eine der obigen Functionen dargestellt werden kann, so ist dieselbe nach unseren Untersuchungen eine dreifache: die Reihe, das Product und der Kettenbruch. Diese Formen entsprechen den vier Species; die Reihe repräsentirt die Addition und Subtraction, indem sie durch successive Additionen und, bei negativen Gliedern, durch successive Subtractionen gebildet wird; das Product stellt die continuirliche Multiplication und der Kettenbruch die fortgesetzte Division dar. Diese Formen, unter welchen die Functionen hier erschienen, sind jedoch nicht die einzig möglichen, und es läfst sich im voraus absehen, dafs man sogleich zu neuen Formen gelangen mufs, wenn es glückt, den bisherigen Rechnungsoperationen neue zuzugesellen. Diese Andeutung möge genügen; sie weiter ausführen hiefse die Grenzen der niederen Analysis überschreiten.

Anhang.

Die höheren Gleichungen.

I. Allgemeine Eigenschaften der ganzen rationalen algebraischen Functionen.

§. 1. Eine ganze, rationale und algebraische Function von x ist bekanntlich unter der Form

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n$$

enthalten, wobei die ganze Zahl n den Grad der Function angiebt; wir bezeichnen eine derartige Function künftig immer mit $f(x)$. Dem Werthe $x = 0$ entspricht der Functionswerth $f(0) = c_0$; für sehr kleine x mufs daher $f(x)$ nahezu $= c_0$, folglich $f(x)$ von demselben Vorzeichen wie c_0 sein. Diese Bemerkung kann noch verallgemeinert werden. Es sind nämlich die absoluten Werthe der Quotienten

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}, \quad \frac{c_{k+2}}{c_{k+1}}, \quad \frac{c_{k+3}}{c_{k+2}}, \ldots .$$

endliche Gröfsen, wofern keiner der Coefficienten c_k, c_{k+1}, c_{k+2} etc. verschwindet, mithin läfst sich immer eine Zahl q finden, deren absoluter Werth mehr beträgt als der absolute Werth jedes solchen Quotienten; man hat dann folgende Ungleichungen

$$c_{k+1} < c_k q,$$
$$c_{k+2} < c_{k+1} q < c_k q^2,$$
$$c_{k+3} < c_{k+2} q < c_k q^3,$$

u. s. w.

Nennen wir ferner ξ den absoluten Werth von x, multipliciren die vorigen Ungleichungen der Reihe nach mit ξ^k, ξ^{k+1}, ξ^{k+2} etc. und addiren, so erhalten wir

$$c_k \xi^k + c_{k+2} \xi^{k+1} + c_{k+2} \xi^{k+2} + \ldots .$$
$$< c_k \xi^k (1 + q\xi + q^2 \xi^2 + q^3 \xi^3 + \ldots .).$$

Die willkürliche Gröſse ξ mag jetzt $< \frac{1}{2q}$ gewählt werden, es ist dann

$$1 + q\xi + q^2\xi^2 + q^3\xi^3 + \dots$$
$$< 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + \dots \textit{ in inf.}$$

oder

$$1 + q\xi + q^2\xi^2 + q^3\xi^3 + \dots < 2,$$

mithin

$$c_k\xi^k + c_{k+1}\xi^{k+1} + c_{k+2}\xi^{k+2} + \dots < 2c_k\xi^k$$

d. i.

$$c_{k+1}\xi^{k+1} + c_{k+2}\xi^{k+2} + \dots < c_k\xi^k.$$

In Worten heiſst dieſs: man kann x immer so klein wählen, daſs der absolute Werth irgend eines Gliedes c_kx^k mehr beträgt als die Summe der absoluten Werthe aller folgenden Glieder. Bei hinreichend kleinen x hat also die Summe

$$c_kx^k + c_{k+1}x^{k+1} + c_{k+2}x^{k+2} + \dots$$

dasselbe Vorzeichen wie der erste Summand.

§. 2. Bezeichnet r irgend einen speciellen Werth von x, so gelten die Gleichungen

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n,$$
$$f(r) = c_0 + c_1r + c_2r^2 + c_3r^3 + \dots + c_nr^n,$$

und aus ihnen folgt

$$\frac{f(x) - f(r)}{x - r} = c_1 + c_2\frac{x^2 - r^2}{x - r} + c_3\frac{x^3 - r^3}{x - r} + \dots + c_n\frac{x^n - r^n}{x - r}.$$

Bekanntlich sind die angedeuteten Divisionen ohne Reste ausführbar und geben

$$\frac{f(x) - f(r)}{x - r} = c_1 + c_2(x + r) + c_3(x^2 + xr + r^2) + \dots$$
$$\dots + c_n(x^{n-1} + x^{n-2}r + \dots + xr^{n-2} + r^{n-1}),$$

welche Gleichung durch Anordnung nach Potenzen von x die Form erhält

$$\frac{f(x) - f(r)}{x - r} = \gamma_0 + \gamma_1x + \gamma_2x^2 + \dots + \gamma_{n-1}x^{n-1}.$$

Die Differenz der Functionen ist demnach ohne Rest theilbar durch die Differenz der Variabelen, und der Quotient bildet eine ganze Function des nächst niedrigeren Grades.

§. 3. Ersetzt man x durch eine complexe Zahl $u + iv$, so wird

$$f(u + iv) = c_0 + c_1u + c_2(u^2 - v^2) + \dots$$
$$+ i[c_1v + 2c_2uv + c_3(3u^2v - v^3) + \dots]$$

oder kürzer

$$f(u + iv) = U + iV,$$

wo U und V reelle Functionen von u und v bezeichnen. Die Norm dieses Ausdruckes ist $U^2 + V^2$, mithin jederzeit positiv. Man kann dieselbe beliebig grofs werden lassen, wenn man u und v sehr grofs nimmt, dagegen läfst sie sich nicht negativ machen, und daher mufs es einen kleinsten Werth der Norm geben. Dieser mag für $u = \alpha$, $v = \beta$ eintreten und heifse $A^2 + B^2$, so dafs

$$f(\alpha + i\beta) = A^2 + B^2$$

ist. Irgend ein von $\alpha + i\beta$ verschiedener Werth des x sei

$$x = \alpha + i\beta + z\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$

wobei $\cos\theta + i\sin\theta$ kurz mit η bezeichnet werden möge; man hat dann

$$\begin{aligned} f(\alpha + i\beta + z\eta) = c_0 + c_1\,[\alpha + i\beta + z\eta] \\ + c_2\,[(\alpha + i\beta)^2 + 2\,(\alpha + i\beta)\,z\eta + z^2\eta^2] \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}$$

Nach Potenzen von $z\eta$ geordnet giebt diefs einen Ausdruck von folgender Form

$$\begin{aligned} f(\alpha + i\beta + z\eta) = f(\alpha + i\beta) + (M_1 + iN_1)\,z\eta \\ + (M_2 + iN_2)\,z^2\eta^2 + \ldots, \end{aligned}$$

worin M_1, N_1, M_2, N_2 etc. gewisse Polynome bezeichnen, deren Werthe sich bei gehöriger Ausrechnung von selber finden. Übrigens können mehrere der Gröfsen M_1, N_1, M_2, N_2 etc. gleich Null sein, und daher wollen wir voraussetzen, dafs $z^k\eta^k$ die erste von denjenigen Potenzen sei, deren Coefficient nicht verschwindet. Zur Abkürzung bezeichnen wir ferner $f(\alpha + i\beta + z\eta)$ mit $P + iQ$ und haben nun

$$\begin{aligned} P + iQ \\ = A + iB + (M_k + iN_k)\,z^k\eta^k + (M_{k+1} + iN_{k+1})\,z^{k+1}\eta^{k+1} + \ldots. \end{aligned}$$

Für das bisher willkürliche η setzen wir einmal eine Wurzel der Gleichung $\eta^k = +1$, das andere Mal eine Wurzel der Gleichung $\eta^k = -1$; es lassen sich daher solche Werthe von η angeben, bei welchen $\eta^k = \varepsilon$ wird, wenn wir unter ε die positive oder negative Einheit verstehen. Nehmen wir dagegen für η eine Wurzel der Gleichung $\eta^{2k} = -1$, so wird $\eta^k = \pm\sqrt{-1} = \pm i\varepsilon$. Demnach giebt es einerseits Werthe von η, bei denen

$$P + iQ = A + \varepsilon M_k z^k + \ldots + i\,(B + \varepsilon N_k z^k + \ldots)$$

wird, andererseits auch Werthe von η, bei denen

$$P + iQ = A - \varepsilon N_k z^k + \ldots + i\,(B + \varepsilon M_k z^k + \ldots)$$

wird. Berechnet man für beide Fälle die Normen, so existiren Werthe von η, welche

$$P^2 + Q^2 - (A^2 + B^2) = 2\varepsilon\,(AM_k + BN_k)\,z^k + \ldots.$$

machen, und ebenso auch Werthe von η, für welche

$$P^2 + Q^2 - (A^2 + B^2) = 2\varepsilon\,(BM_k - AN_k)\,z^k + \ldots.$$

wird. Bei hinreichend kleinen z haben die rechten Seiten dieser Gleichungen die nämlichen Vorzeichen wie die ersten Summanden (§. 1), und da man ε nach Gefallen positiv oder negativ machen kann, so giebt es immer Werthe von η und z, für welche die rechten Seiten negativ ausfallen, wofern nicht $AM_k + BN_k$ und $BM_k - AN_k$ gleichzeitig verschwinden. Dieses Resultat widerspricht der Voraussetzung, dafs $A^2 + B^2$ der Minimalwerth der Norm, mithin $P^2 + Q^2 - (A^2 + B^2)$ positiv ist, und der Widerspruch besteht so lange, als $AM_k + BN_k$ und $BM_k - AN_k$ nicht gleichzeitig verschwinden. Da nun die Voraussetzung (dafs nämlich ein Minimum der Norm existirt) richtig ist, so müssen die Gleichungen

$$AM_k + BN_k = 0 \quad \text{und} \quad BM_k - AN_k = 0$$

bestehen, woraus folgt

$$(AM_k + BN_k)^2 + (BM_k - AN_k)^2 = 0$$

oder

$$(M_k^2 + N_k^2)\,(A^2 + B^2) = 0.$$

Der Voraussetzung zufolge verschwinden M_k und N_k nicht gleichzeitig, mithin ist $M_k^2 + N_k^2$ keinenfalls $= 0$, und daher mufs $A^2 + B^2 = 0$ sein; weil ferner A und B reell sind, so folgt $A = 0$, $B = 0$ d. h.

$$f(\alpha + i\beta) = 0.$$

Hiernach giebt es mindestens einen complexen Werth $x = \alpha + i\beta$, für welchen $f(x) = 0$ wird, d. h. jede algebraische Gleichung hat wenigstens eine reelle oder complexe Wurzel.

Diefs ist der Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen; er wurde zuerst von Gaufs auf drei verschiedene Arten bewiesen, nachher von vielen Anderen. Der obige Beweis rührt von Legendre her und ist später von Cauchy und Sturm modificirt worden.

§. 4. Nennen wir x_1 den reellen oder complexen Werth, welcher $f(x_1) = 0$ giebt, so haben wir identisch

$$f(x) = f(x) - f(x_1) = (x - x_1)\,\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Nach §. 2 geht die angedeutete Division auf, und der Quotient ist eine ganze Function $(n-1)$ten Grades, welche $f_1(x)$ heifsen möge; daher ist

$$f(x) = (x - x_1)\,f_1(x).$$

Wenden wir auf $f_1(x)$ wieder den Fundamentalsatz an, so existirt

jedenfalls ein Specialwerth $x = x_2$, für welchen $f_1(x_2) = 0$ wird; daraus folgt $f_1(x) = (x - x_2) f_2(x)$ oder

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_2(x),$$

wo $f_2(x)$ vom $(n-2)$ten Grade ist. Durch Wiederholung dieser Schlüsse gelangt man schliefslich zu $f_{n-2}(x) = (x - x_{n-1}) f_{n-1}(x)$, und hier ist $f_{n-1}(x)$ vom ersten Grade etwa $= (x - x_n) C$. Man hat demnach

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$
$$= C(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n);$$

die wirkliche Ausführung der Multiplication giebt C als Coefficienten von x^n, mithin $C = c_n$ und

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n$$
$$= c_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n).$$

Jede ganze Function läfst sich demnach in lineare Factoren zerlegen, die ebensowohl reell als complex sein können.

Wenn $f(x) = 0$ wird für $x = \alpha + i\beta$, so verschwindet $f(x)$ auch für den conjugirten complexen Werth $x = \alpha - i\beta$, wie aus §. 3 leicht zu schliefsen ist. Zwei conjugirte lineare Factoren sind demnach

$$x - \alpha - i\beta \quad \text{und} \quad x - \alpha + i\beta;$$

sie liefern zusammen das reelle Product

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2).$$

Jede ganze Function kann daher in reelle Factoren zerlegt werden, die höchstens vom zweiten Grade sind.

§. 5. Dividirt man die vorhin erhaltene Gleichung

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots c_n x^n$$
$$= c_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$$

durch c_n und setzt

$$\frac{c_0}{c_n} = a_n, \quad \frac{c_1}{c_n} = a_{n-1}, \quad \frac{c_2}{c_n} = a_{n-2}, \quad \ldots.$$

so ist auch

$$1) \quad \begin{cases} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \\ = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_n). \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich mehrere Beziehungen zwischen den Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. und den Wurzeln x_1, x_2, x_3 etc. herleiten.

Denkt man sich die rechte Seite der Gleichung 1) durch Multiplication entwickelt und alle Partialproducte nach absteigenden Potenzen von x geordnet, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten von x^{n-1}, x^{n-2} etc. folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n),\\
a_2 &= +(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n\\
&\qquad + x_2x_3 + \dots + x_2x_n\\
&\qquad\qquad \dots\dots\dots\\
&\qquad\qquad + x_{n-1}x_n),\\
a_3 &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_1x_2x_n\\
&\qquad + \dots\dots\dots\\
&\qquad\qquad + x_{n-2}x_{n-1}x_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_n &= (-1)^n x_1x_2x_3 \dots x_n.
\end{aligned}$$

Um dieselben allgemein und kurz darstellen zu können, bezeichnen wir mit $\overset{n}{C}_k$ die Summe, welche entsteht, wenn die n Elemente x_1, $x_2, \dots x_n$ ohne Wiederholungen zu Gruppen von je k Elementen combinirt, diese Combinationen als Producte betrachtet und addirt werden; es ist dann

2) $$a_k = (-1)^k \overset{n}{C}_k,$$

mithin a_1 die negative Summe der Wurzeln, a_2 die positive Summe ihrer Amben, a_3 die negative Summe ihrer Ternen u. s. w.

Eine zweite Anwendung der Gleichung 1) beruht auf folgendem Grenzenübergange. Zur Abkürzung sei

3) $$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

also nach No. 1)

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n);$$

in dieser Gleichung setzen wir $x + \vartheta$ an die Stelle von ϑ, dividiren die neue Gleichung durch die vorige und nehmen beiderseits die natürlichen Logarithmen; wir haben dann zunächst

4) $$l\left\{\frac{f(x+\vartheta)}{f(x)}\right\}$$

$$= l\left(1 + \frac{\vartheta}{x - x_1}\right) + l\left(1 + \frac{\vartheta}{x - x_2}\right) + \dots + l\left(1 + \frac{\vartheta}{x - x_n}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist einerlei mit

$$l\left\{1 + \frac{f(x+\vartheta) - f(x)}{f(x)}\right\} = l(1+\delta),$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{f(x+\vartheta) - f(x)}{f(x)} = \delta$$

gesetzt worden ist; dividiren wir noch beide Seiten der Gleichung 4) durch ϑ, so wird die linke Seite

$$\frac{l(1+\delta)}{\vartheta} = \frac{l(1+\delta)}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\vartheta} = \frac{l(1+\delta)}{\delta} \cdot \frac{f(x+\vartheta) - f(x)}{f(x) \cdot \vartheta}$$

d. i. vermöge der Werthe von $f(x+\vartheta)$ und $f(x)$ in No. 3)

$$\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{l(1+\delta)}{\delta}\left\{\frac{(x+\vartheta)^n-x^n}{\vartheta}+a_1\frac{(x+\vartheta)^{n-1}-x^{n-1}}{\vartheta}+\ldots\right\}.$$

Noch etwas besser gestaltet sich dieser Ausdruck, wenn

$$\frac{\vartheta}{x}=\vartheta' \quad \text{oder} \quad \vartheta=\vartheta' x$$

gesetzt wird; man erhält nämlich

$$5)\quad \frac{l[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]}{f(x)}\left\{\frac{(1+\vartheta')^n-1}{\vartheta'}x^{n-1}+\frac{(1+\vartheta')^{n-1}-1}{\vartheta'}a_1x^{n-2}+\ldots.\right\}.$$

Auf der rechten Seite von No. 4) stehen Summanden von der Form

$$l\left(1+\frac{\vartheta}{x-x_k}\right);$$

dividirt man jeden derselben durch ϑ und setzt

$$\frac{\vartheta}{x-x_k}=\delta_k,$$

so wird jener Summand zum folgenden

$$\frac{l(1+\delta_k)}{\vartheta}=\frac{l(1+\delta_k)}{\delta_k}\cdot\frac{\delta_k}{\vartheta}=\frac{l(1+\delta_k)}{\delta_k}\cdot\frac{1}{x-x_k}$$

und man hat die Summe

$$6)\quad \frac{l(1+\delta_1)}{\delta_1}\cdot\frac{1}{x-x_1}+\frac{l(1+\delta_2)}{\delta_2}\cdot\frac{1}{x-x_2}+\ldots.$$

Die in No. 5) und 6) verzeichneten Ausdrücke sind gleich und bleiben es, wenn man zur Grenze für verschwindende ϑ übergeht. Wie man aus den Werthen von δ, ϑ', δ_1, δ_2 etc. sieht, convergiren diese Gröfsen gegen die Null und zugleich ist

$$Lim\,\frac{l(1+\delta)}{\delta}=Lim\left\{l[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]\right\}=le=1,$$

$$Lim\,\frac{(1+\vartheta')^m-1}{\vartheta'}=m,$$

mithin bleibt, wenn gleichzeitig in No. 5) für $f(x)$ sein Werth substituirt wird,

$$7)\quad \frac{nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots+1a_{n-1}}{x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}$$

$$=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\ldots+\frac{1}{x-x_n}.$$

Für $x=\frac{1}{\xi}$ geht die Gleichung über in

$$\frac{n+(n-1)a_1\xi+(n-2)a_2\xi^2+\ldots.+1a_{n-1}\xi^{n-1}}{1+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots.+a_{n-1}\xi^{n-1}+a_n\xi^n}$$

$$=\frac{1}{1-x_1\xi}+\frac{1}{1-x_2\xi}+\frac{1}{1-x_3\xi}+\ldots+\frac{1}{1-x_n\xi},$$

und wenn man hier die willkürliche Gröfse ξ so klein wählt, dafs der Modulus von jedem der Producte $x_1\xi$, $x_2\xi$, ... $x_n\xi$ weniger als die Einheit beträgt, so kann man die Brüche rechter Hand mittelst der Formel

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \ldots,$$
$$mod\; z < 1,$$

in unendliche Reihen verwandeln. Die rechte Seite der vorigen Gleichung wird

$$\begin{aligned} n &+ (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)\xi \\ &+ (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\xi^2 \\ &+ (x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3)\xi^3 \\ &+ \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots + x_n^k = S_k$$

sein möge; man hat nun

$$\frac{n + (n-1)a_1\xi + (n-2)a_2\xi^2 + \ldots + 1a_{n-1}\xi^{n-1}}{1 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1} + a_n\xi^n}$$
$$= n + S_1\xi + S_2\xi^2 + S_3\xi^3 + \ldots.$$

Multiplicirt man mit dem links stehenden Nenner die rechter Hand befindliche Reihe und ordnet das Product nach Potenzen von ξ, so müssen die Coefficienten gleicher Potenzen von ξ auf beiden Seiten dieselben sein; aus der Vergleichung der Coefficienten von ξ, ξ^2, ξ^3, ..., ξ^n ergeben sich hiernach folgende Relationen:

$$8)\quad \begin{cases} 0 = 1a_1 + S_1, \\ 0 = 2a_2 + a_1S_1 + S_2 \\ 0 = 3a_3 + a_2S_1 + a_1S_2 + S_3, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 = na_n + a_{n-1}S_1 + a_{n-2}S_2 + \ldots + a_1S_{n-1} + S_n; \end{cases}$$

die Vergleichung der Coefficienten von ξ^{n+1}, ξ^{n+2} liefert noch

$$9)\quad \begin{cases} 0 = a_nS_1 + a_{n-1}S_2 + \ldots + a_1S_n + S_{n+1}, \\ 0 = a_{n+1}S_1 + a_nS_2 + \ldots + a_1S_{n+1} + S_{n+2}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{cases}$$

Mittelst dieser von Newton gefundenen Relationen lassen sich aus den blofsen Coefficienten der Gleichung

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

die Summen der ganzen Potenzen ihrer Wurzeln berechnen, ohne dafs man die Gleichung aufzulösen braucht; die Gleichungen 8) geben nämlich der Reihe nach

10)
$$\begin{cases} S_1 = -a_1, \\ S_2 = +a_1^2 - 2a_2, \\ S_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3, \\ S_4 = +a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 2a_2^2 + 4a_1a_3 - 4a_4 \\ S_5 = -a_1^5 + 5a_1^3a_2 - 5a_1a_2^2 - 5a_1^2a_3 + 5a_2a_3 \\ \qquad\qquad + 5a_1a_4 + 5a_5, \end{cases}$$

u. s. w.

§. 6. Die Newton'schen Relationen gestatten eine noch viel weiter gehende Anwendung, behufs welcher erst einige Definitionen vorausgeschickt werden müssen.

Eine Function mehrer Variabelen u, v, w etc. nennt man symmetrisch, wenn sie ungeändert bleibt, sobald die Variabelen irgendwie gegen einander vertauscht werden. So sind z. B.

$$5(u+v+w) - 6uvw,$$
$$uv(u+v) + vw(v+w) + wu(w+u)$$

ganze und rationale symmetrische Functionen der drei Veränderlichen u, v, w; zu den gebrochenen symmetrischen Functionen gehört

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{uv+vw+wu};$$

als Beispiel für irrationale symmetrische Functionen mag die Fläche eines aus den drei Seiten u, v, w construirten Dreiecks gelten, nämlich

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{2(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)-(u^4+v^4+w^4)}.$$

Wie leicht zu sehen ist, gehört zu einer gebrochenen symmetrischen Function, dafs Zähler und Nenner für sich symmetrisch sind, ebenso müssen bei irrationalen symmetrischen Functionen die unter den Wurzelzeichen vorkommenden Ausdrücke symmetrisch sein; wir haben daher nur ganze rationale symmetrische Functionen zu betrachten, die in Functionen verschiedener Grade eingetheilt werden müssen.

Die einfachste symmetrische Function der n Variabelen x_1, x_2, . . . x_n ist deren Summe; die nächst allgemeinere ist

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_3^\alpha + \ldots + x_n^\alpha,$$

worin α jede beliebige Gröfse sein kann. Wir bezeichnen dieselben mit $\Sigma(x^\alpha)$ und haben

11)
$$\Sigma(x^\alpha = S_\alpha.$$

Unter einer sogenannten zweiförmigen symmetrischen Function von x_1, x_2, . . . x_n versteht man eine solche, die aus Producten von der Form $x^\alpha y^\beta$ zusammengesetzt ist; sie lautet vollständig entwickelt

$$x_1^\alpha x_2^\beta + x_1^\beta x_2^\alpha + x_1^\alpha x_3^\beta + x_1^\beta x_3^\alpha + \dots + x_1^\alpha x_n^\beta + x_1^\beta x_n^\alpha$$
$$+ x_2^\alpha x_3^\beta + x_2^\beta x_3^\alpha + \dots + x_2^\alpha x_n^\beta + x_2^\beta x_n^\alpha$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ x_{n-1}^\alpha x_n^\beta + x_{n-1}^\beta x_n^\alpha$$

und wird mit $\Sigma(x^\alpha y^\beta)$ bezeichnet. Man erkennt leicht, dafs sie dem Ausdrucke

$$(x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha)(x_1^\beta + x_2^\beta + \dots + x_n^\beta)$$
$$-(x_1^{\alpha+\beta} + x_2^{\alpha+\beta} + \dots + x_n^{\alpha+\beta})$$

gleichkommt, dafs also

12) $$\Sigma(x^\alpha y^\beta) = S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta}$$

ist. Für den Fall $\beta = \alpha$ erleidet diese Formel eine Ausnahme, vielmehr wird dann

13) $$\Sigma(x^\alpha y^\alpha) = \tfrac{1}{2}(S_\alpha^2 - S_{2\alpha}).$$

Die dreiförmige symmetrische Function $\Sigma(x^\alpha y^\beta z^\gamma)$ besteht aus Summanden von der Form $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ und kann leicht durch Multiplication der drei Functionen $\Sigma(x^\alpha)$, $\Sigma(y^\beta)$, $\Sigma(z^\gamma)$ entwickelt werden. Das Product enthält nämlich erstens Summanden von der Form $x^{\alpha+\beta+\gamma}$, ferner Summanden von den Formen $x^{\alpha+\beta}y^\gamma$, $x^{\alpha+\gamma}y^\beta$, $x^{\beta+\gamma}y^\alpha$, endlich Summanden von der Form $x^\alpha y^\beta z^\gamma$; es ist also

$$S_\alpha S_\beta S_\gamma = \Sigma(x^{\alpha+\beta+\gamma})$$
$$+ \Sigma(x^{\alpha+\beta}y^\gamma) + \Sigma(x^{\alpha+\gamma}y^\beta) + \Sigma(x^{\beta+\gamma}y^\alpha)$$
$$+ \Sigma(x^\alpha y^\beta z^\gamma),$$

und wenn man für die drei zweiförmigen Functionen ihre Werthe setzt, so erhält man

14) $$\Sigma(x^\alpha y^\beta z^\gamma) = S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta}S_\gamma - S_{\alpha+\gamma}S_\beta - S_{\beta+\gamma}S_\alpha + 2S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

In dem speciellen Falle $\beta = \alpha$ wird

15) $$\Sigma(x^\alpha y^\alpha z^\gamma = \tfrac{1}{2}(S_\alpha^2 S_\gamma - S_{2\alpha}S_\gamma - S_{\alpha+\gamma}S_\alpha + 2S_{2\alpha+\gamma});$$

endlich für $\gamma = \beta = \alpha$

16) $$\Sigma(x^\alpha y^\alpha z^\alpha) = \tfrac{1}{6}(S_\alpha^3 - 3S_{2\alpha}S_\alpha + 2S_{3\alpha}).$$

Den weiteren Fortgang dieser Betrachtungsweise übersieht man leicht; um $\Sigma(x^\alpha y^\beta z^\gamma u^\delta)$ zu erhalten, würde man $\Sigma(x^\alpha)$, $\Sigma(y^\beta)$, $\Sigma(z^\gamma)$, $\Sigma(u^\delta)$ mit einander multipliciren und alle dreiförmigen Functionen nach Formel 14) oder 15) oder 16) ausdrücken u. s. w. Jedenfalls

kann man die zusammengesetzten symmetrischen Functionen auf S_α, S_β, S_γ etc. zurückführen, und da man die Werthe der letzteren unmittelbar aus den Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. herleiten kann, wofern α, β, γ etc. ganze positive Zahlen sind, so hat man den Satz: jede symmetrische Function der Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$ läfst sich unmittelbar durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken.

Beispielsweis lösen wir die Aufgabe, den Inhalt $\triangle$ eines Dreiecks zu berechnen, dessen Seiten die Wurzeln der cubischen Gleichung

17) $$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

sind, wobei die Möglichkeit dieses Dreiecks vorausgesetzt wird. Hier ist für drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 die gesuchte symmetrische Function

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{2\Sigma(x^2y^2) - \Sigma(x^4)},$$

ferner nach No. 13) und 11)

$$2\Sigma(x^2y^2) = S_2^2 - S_4, \quad \Sigma(x^4) = S_4,$$

mithin

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{S_2^2 - 2S_4},$$

und schliefslich, wenn die Werthe von S_2 und S_4 aus No. 10) substituirt werden, wobei $a_4 = 0$ zu nehmen ist,

18) $$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{-a_1^4 + 4a_1^2 a_2 - 8a_1 a_3}.$$

Als zweites Beispiel diene die Berechnung des Productes

19) $$P = (x_1 - x_2)^2\,(x_2 - x_3)^2\,(x_3 - x_1)^2,$$

worin x_1, x_2, x_3 wie vorhin die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

bedeuten mögen. Die Ausführung der angedeuteten Multiplication giebt

$$P = \Sigma(x^2y^4) - 2\Sigma(x^3y^3) + 2x_1x_2x_3\,\Sigma(xy^2)$$
$$- 6(x_1x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3\,\Sigma(x^3),$$

mithin ist nach den früheren Formeln und wegen $x_1x_2x_3 = -a_3$,

$$P = S_2S_4 - S_3^2 - a_3(2S_1S_2 - 4S_3) - 6a_3^2$$

und durch Substitution der Werthe von S_1, S_2, S_3, S_4

20) $$P = a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 + 18a_1a_2a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

§. 7. Auf den vorigen Untersuchungen beruht auch die Lösung des Problemes, diejenige Gleichung zu entwickeln, deren Wurzeln die Quadrate aller Differenzen zwischen den Wurzeln einer gegebenen Gleichung sind. Bezeichnen nämlich $x_1, x_2, \dots x_n$ die Wurzeln der Gleichung

21) $$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

so denke man sich erst die Quadrate aller Wurzeldifferenzen gebildet:

$$\begin{array}{llll}(x_1-x_2)^2, & (x_1-x_3)^2, & (x_1-x_4)^2, & \ldots.(x_1-x_n)^2,\\ & (x_2-x_3)^2, & (x_2-x_4)^2, & \ldots.(x_2-x_n)^2,\\ & & (x_3-x_4)^2, & \ldots.(x_3-x_n)^2,\\ & & \ldots\ldots\ldots & \\ & & & (x_{n-1}-x_n)^2,\end{array}$$

und nenne diese Gröſsen, deren Anzahl $=\frac{1}{2}n(n-1)$ ist, der Reihe nach $y_1, y_2, y_3, \ldots. y_q$, wobei q zur Abkürzung für $\frac{1}{2}n(n-1)$ dient. Wird ferner die negative Summe von $y_1, y_2, \ldots y_q$ mit b_1 bezeichnet, die positive Summe der aus $y_1, y_2, \ldots y_q$ gebildeten Amben mit b_2 u. s. w., so sind $y_1, y_2, \ldots. y_q$ die q Wurzeln der Gleichung

22) $$y^q+b_1x^{q-1}+b_2y^{q-2}+\ldots+b_{q-1}y+b_q=0,$$

und es kommt nun darauf an, die Coefficienten $b_1, b_2, \ldots b_q$ unmittelbar aus den in No. 21) gegebenen Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ herzuleiten.

Wenden wir die Newton'schen Relationen auf die Gleichung 22) an, indem wir

$$y_1^k+y_2^k+\cdots+y_q^k=\Sigma(y^k)=T_k$$

setzen, so haben wir

$$\begin{aligned}0&=1b_1+T_1,\\0&=2b_2+b_1T_1+T_2,\\0&=3b_3+b_2T_1+b_1T_2+T_3,\\&\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

mithin

23) $$\begin{cases}b_1=-T_1,\\ b_2=-\frac{1}{2}(b_1T_1+T_2),\\ b_3=-\frac{1}{3}(b_2T_1+b_1T_2+T_3),\\ \ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

es lassen sich also die Coefficienten b_1, b_2 etc. finden, wenn man die Summen T_1, T_2, etc. kennt; es handelt sich daher nur noch darum, T_1, T_2, etc. durch a_1, a_2, etc. oder durch S_1, S_2, etc. auszudrücken. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Function

$$\varphi(x)=(x-x_1)^{2k}+(x-x_2)^{2k}+\ldots.+(x-x_n)^{2k},$$

setzen darin $x=x_1, x_2, \ldots. x_n$, und addiren alle entstehenden Gleichungen; dieſs giebt

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\ldots.+\varphi(x_n)\\&=(x_1-x_2)^{2k}+(x_1-x_3)^{2k}+\ldots.+(x_1-x_n)^{2k}\\&+(x_2-x_1)^{2k}+(x_2-x_3)^{2k}+\ldots.+(x_2-x_n)^{2k}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+(x_n-x_1)^{2k}+(x_n-x_2)^{2k}+\ldots.+(x_n-x_{n-1})^{2k}.\end{aligned}$$

Zufolge der Bedeutung von $y_1, y_2, \dots y_q$ ist die rechte Seite dieser Gleichung das Doppelte von $y_1^k + y_2^k + \dots + y_q^k = T_k$, mithin umgekehrt

$$2T_k = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n).$$

Die ursprüngliche Function $\varphi(x)$ läſst sich auch dadurch in eine andere Form bringen, daſs man die Potenzen $(x - x_1)^{2k}$, $(x - x_2)^{2k}$, etc. mittelst des binomischen Satzes entwickelt und Alles nach Potenzen von x ordnet; man erhält ohne Mühe

$$\varphi(x) = nx^{2k} - (2k)_1 \, S_1 x^{2k-1} + (2k)_2 \, S_2 x^{2k-2} - \dots$$

und hieraus

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)$$
$$= n\, S_{2k} - (2k)_1 \, S_1 S_{2k-1} + (2k)_2 \, S_2 S_{2k-2} - \dots$$

Die linke Seite ist, dem Vorhergehenden zufolge, $= 2T_k$; rechter Hand sind die vom Anfang und Ende der Reihe gleichweit entfernten Glieder gleich und können zusammengezogen werden, während dagegen der mittelste Summand $(2k)_k S_k S_k$ nur einmal vorkommt. Dividirt man beiderseits mit 2 und schreibt der Symmetrie wegen S_0 für n, so hat man zur Berechnung von T_k folgende Formel

$$24) \quad T_k = (2k)_0 S_0 S_{2k} - (2k)_1 S_1 S_{2k-1} + (2k)_2 S_2 S_{2k-2} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{k-1} (2k)_{k-1} S_{k-1} S_{k+1} + (-1)^k \tfrac{1}{2} (2k)_k S_k S_k,$$

mithin für $k = 1, 2, 3$ etc.

$$25) \quad \begin{cases} T_1 = S_0 S_2 - S_1^2, \\ T_2 = S_0 S_4 - 4 S_1 S_3 + 3 S_2^2, \\ T_3 = S_0 S_6 - 6 S_1 S_5 + 15 S_2 S_4 - 10 S_3^2, \end{cases}$$

u. s. w.

Nach den Formeln 10) kennt man die Werthe von S_1, S_2, S_3, etc.; die vorstehenden Gleichungen liefern T_1, T_2, T_3, etc., endlich findet man b_1, b_2, b_3, etc. aus No. 23).

Als Beispiel diene die cubische Gleichung

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0;$$

wegen $a_4 = a_5 = a_6 \dots = 0$ ist dann

$$\begin{aligned} S_1 &= - a_1, \\ S_2 &= + a_1^2 - 2a_2, \\ S_3 &= - a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3, \\ S_4 &= + a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2, \\ S_5 &= - a_1^5 + 5a_1^3 a_2 - 5a_1^2 a_3 - 5a_1 a_2^2 + 5a_2 a_3, \\ S_6 &= + a_1^6 - 6a_1^4 a_2 + 6a_1^3 a_3 + 9a_1^2 a_2^2 \\ &\qquad - 12 a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3 + 3a_3^2; \end{aligned}$$

ferner erhält man aus No. 25)

$$T_1 = 3S_2 - S_1^2 = 2a_1^2 - 6a_2,$$
$$T_2 = 3S_4 - 4S_1S_3 + 3S_2^2$$
$$= 2a_1^4 - 12a_1^2a_2 + 18a_2^2,$$
$$T_3 = 3S_6 - 6S_1S_5 + 15S_2S_4 - 10S_3^2$$
$$= 2a_1^6 - 18a_1^4a_2 - 12a_1^3a_3 + 57a_1^2a_2^2$$
$$+ 54a_1a_2a_3 - 66a_2^3 - 81a_3^2,$$

und aus No. 23)

$$b_1 = 2a_1^2 + 6a_2,$$
$$b_2 = a_1^4 - 6a_1^2a_2 + 9a_2^2,$$
$$b_3 = 4a_1^3a_3 - a_1^2a_2^2 - 18a_1a_2a_3 + 4a_2^3 + 27a_3^2;$$

die Substitution dieser Werthe liefert die gesuchte Gleichung

$$y^3 + b_1y^2 + b_2y + b_3 = 0.$$

Der letzte Coefficient b_3 ist $= -y_1y_2y_3$ und daher das Entgegengesetzte von dem in §. 6 betrachteten Producte P.

Die für y gefundene Gleichung No. 22) nennt man die Gleichung der quadrirten Wurzeldifferenzen; sie kann bei der Untersuchung über die Existenz imaginärer Wurzeln benutzt werden. Der letzte Coefficient ist

$$b_q = (-1)^q y_1y_2y_3 \dots y_q$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \dots (x_1 - x_n)^2$$
$$(x_2 - x_3)^2 \dots (x_2 - x_n)^2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$(x_{n-1} - x_n)^2$$

und heifst die Determinante der ursprünglichen Gleichung $x^n + a_1x^{n-1} + \dots = 0$. Hiernach wird z. B. die Determinante der quadratischen Gleichung

$$x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

durch

$$\varDelta_2 = -(x_1 - x_2)^2 = -(a_1^2 - 4a_2)$$

dargestellt; für die quadratische Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

ist

$$\varDelta_2 = \frac{4}{a^2}(ac - b^2).$$

Als Determinante der cubischen Gleichung

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

ergiebt sich aus dem Obigen

$$\varDelta = \frac{27}{a^4}(4ac^3 + a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4b^3d - 6bcd).$$

Die Determinante der biquadratischen Gleichung

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

bildet einen sehr complicirten Ausdruck, welcher sich indessen kurz darstellen läfst, wenn

$$A = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$B = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3$$

gesetzt wird; es ergiebt sich nämlich

$$\Delta_4 = \frac{16}{a^6}(A^3 - 27B^2).$$

II. Die Discussion der höheren Gleichungen.

§. 8. Die bekannten elementaren Methoden, welche zur Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen dienen, reichen nicht mehr aus, wenn es sich um die Auflösung der allgemeinen, in Buchstaben ausgedrückten Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

handelt, worin n mehr als 4 beträgt; auch ist bereits auf mehrfache Weise direct bewiesen worden, dafs solche höhere Gleichungen nicht algebraisch sondern nur durch Hülfsmittel der Integralrechnung aufgelöst werden können. Sind dagegen die Coefficienten der Gleichung in Zahlen gegeben, so lassen sich auch die Wurzeln der Gleichung mit jedem beliebigen Genauigkeitsgrade berechnen (s. Abschnitt III.). Bevor man hierzu schreitet, mufs aber untersucht werden, wieviel reelle oder imaginäre Wurzeln die Gleichung besitzt, ob darunter gleiche Wurzeln vorkommen oder nicht, wieviele der etwaigen reellen Wurzeln positiv sind, wieviele negativ, zwischen welchen Grenzen dieselben liegen u. s. w. Zur Entscheidung dieser Vorfragen dienen mehrere Sätze, deren Herleitung uns obliegt.

Wir gehen von der Voraussetzung aus, dafs die gegebene Gleichung

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

mehrere positive Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ besitze; nach Formel 1) in §. 5 können wir dann $f(x)$ unter folgender Form darstellen:

$$f(x) = \varphi(x) \cdot (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots,$$

wobei $\varphi(x)$ eine Function von niedrigerem Grade ist, etwa

$$\varphi(x) = x^k + ax^{k-1} + bx^{k-2} + \ldots$$

Die Coefficienten a, b, c, etc. können theils positiv, theils negativ sein, ihre Vorzeichen werden daher irgend eine unregelmäfsige Reihe bilden, z. E.

$$+ + - + - - - + -,$$

und wir richten dabei die Aufmerksamkeit auf die Anzahl der Zeichenfolgen (+ + oder — —) und der Zeichenwechsel (+ — oder — +), wonach in dem erwähnten Beispiele drei Folgen und fünf Wechsel zu notiren sind. Multipliciren wir $\varphi(x)$ mit $x - \alpha$, so enthält das Product wieder gewisse Folgen und Wechsel, deren Anzahl sich etwas näher bestimmen läſst, wenn wir das obige Beispiel wieder vornehmen. Die einzelnen Partialproducte, welche durch Multiplication mit x und durch Multiplication mit $-\alpha$ entstehen, haben nämlich folgende Vorzeichen

$$\begin{array}{l} + + - + - - - + - \\ \quad\; - - + - + + + - +, \end{array}$$

mithin sind die Vorzeichen von $\varphi(x) \,.\, (x - \alpha)$

$$+ \pm - + - \pm \pm + - +,$$

wobei die Zeichen $\pm$ solange unentschieden bleiben, als die Zahlwerthe von a, b, c, etc. nicht näher bekannt sind. Es leuchtet nun ohne Weiteres ein, daſs in dem Producte $\varphi(x) \,.\, (x - \alpha)$ ebensoviel unentschiedene Zeichen vorkommen als Zeichenfolgen in $\varphi(x)$; wären alle unentschiedenen Zeichen positiv, so würde $\varphi(x) \,.\, (x - \alpha)$ sicher einen Zeichenwechsel mehr als $\varphi(x)$ haben, weil das letzte Zeichen des Productes jedesmal dem letzten Zeichen von $\varphi(x)$ entgegengesetzt ist; ebenso verhält sich die Sache, wenn alle unentschiedenen Zeichen negativ ausfallen. Sind endlich die unentschiedenen Zeichen theils positiv theils negativ, so nimmt die Anzahl der Zeichenwechsel um mehr als eine Einheit zu. Auf alle Fälle hat das Product $\varphi(x) \,.\, (x - \alpha)$ wenigstens einen Zeichenwechsel mehr als $\varphi(x)$. Multiplicirt man weiter mit $x - \beta$, so besitzt $\varphi(x) \,.\, (x - \alpha)(x - \beta)$ mindestens einen Zeichenwechsel mehr als das vorige Product, mithin wenigstens zwei Zeichenwechsel mehr als $\varphi(x)$; wie diese Schluſsweise fortzusetzen ist, erhellt leicht. Gesetzt nun, $\varphi(x)$ enthalte gar keinen Zeichenwechsel, so würde $\varphi(x) \,.\, (x - \alpha)$ mindestens einen Zeichenwechsel haben, ferner würden in $\varphi(x) \,.\, (x - \alpha)(x - \beta)$ mindestens zwei Wechsel vorhanden sein u. s. w. Geht man so fort, bis die letzte positive Wurzel in Rechnung gebracht ist, so hat man den Satz, daſs $f(x)$ wenigstens ebensoviel Zeichenwechsel besitzt, als positive Wurzeln vorhanden sind, oder umgekehrt, daſs die Gleichung $f(x) = 0$ höchstens soviel positive Wurzeln als Zeichenwechsel haben kann.

Läſst man $-x$ an die Stelle von x treten, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$f(-x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots = 0$$

gleich und entgegengesetzt den Wurzeln der vorigen Gleichung $f(x) = 0$; demnach hat die Gleichung $f(x) = 0$ soviel negative Wurzeln, als $f(-x) = 0$ positive Wurzeln besitzt, mithin höchstens soviele, als in $f(-x)$ Zeichenwechsel vorkommen. Jedem Zeichenwechsel in $f(-x)$ entspricht aber eine Zeichenfolge in $f(x)$, also hat $f(x) = 0$ höchstens soviel negative Wurzeln als $f(x)$ Zeichenfolgen. Alles zusammen giebt folgenden, von Descartes herrührenden Satz: Eine Gleichung besitzt höchstens soviel positive Wurzeln als Zeichenwechsel und höchstens soviel negative als Zeichenfolgen.

Die vorigen Schlüsse beruhen auf der Voraussetzung, dafs keiner der Coefficienten $A, B, \ldots M, N$ verschwindet, also die Gleichung lückenlos ist; sie lassen sich aber leicht auf diesen Fall ausdehnen, indem man den fehlenden Gliedern die Coefficienten ± 0 zuschreibt. Mit dieser Modification bleibt der Satz allgemein richtig.

Die Cartesianische Zeichenregel entscheidet nicht über die Existenz von reellen oder complexen Wurzeln und kann daher auch nur in dem Falle angewendet werden, wo man sich auf anderem Wege von dem Vorhandensein reeller Wurzeln überzeugt hat. Ist man sicher, dafs alle Wurzeln der Gleichung reell sind, so kann man auch die Anzahl der positiven sowie der negativen Wurzeln angeben. Es sei nämlich n der Grad der Gleichung, v die Anzahl der Zeichenfolgen, w die Anzahl der Wechsel, es ist dann einerseits $v + w = n$. Wenn andererseits p positive und q negative Wurzeln existiren, so ist wegen der Realität aller Wurzeln $p + q = n$, mithin

$$p + q = v + w.$$

Die obige Zeichenregel giebt ferner

$$p \leqq w, \quad q \leqq v,$$

und wenn diese Relationen keinen Widerspruch gegen die vorige Gleichung enthalten sollen, so mufs

$$p = w \quad \text{und} \quad q = v$$

sein, d. h. Eine Gleichung mit durchaus reellen Wurzeln hat soviel positive Wurzeln als Zeichenwechsel und soviel negative als Zeichenfolgen.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$x^3 - 39x + 70 = 0$$

oder

$$x^3 \pm 0 \,.\, x^2 - 39x + 70 = 0.$$

Sowohl wenn der Coefficient von x^2 mit dem positiven, als wenn er mit dem negativen Zeichen genommen wird, besitzt die Gleichung

zwei Wechsel und eine Folge, mithin zwei positive Wurzeln und eine negative, wenn alle Wurzeln reell sind.

§. 9. Wir wollen die vorige Untersuchung noch etwas weiter führen und namentlich auf den Fall ausdehnen, wo mehrere der Coefficienten $A, B, C, \ldots M, N$ gleich Null sind. Übrigens findet der letztere Fall statt, denn die Gleichung besitzt die Wurzeln $+2$, $+5$ und -7.

a. Die gegebene Gleichung sei vom $n$ten Grade und zwischen zwei Gliedern derselben mag eine gerade Anzahl aufeinander folgender Glieder fehlen; es ist dann zu unterscheiden, ob die einschliefsenden Glieder, zwischen denen die Lücke vorkommt, gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Im ersten Falle können wir den fehlenden Gliedern, deren Anzahl $2k$ heifsen möge, dasselbe Vorzeichen geben, was die einschliefsenden Glieder besitzen; wir haben dann $2k+2$ Glieder mit gleichen Zeichen und darin $2k+1$ Zeichenfolgen. Sind nun in den übrigen Gliedern noch v Zeichenfolgen, so ist die Anzahl der positiven Wurzeln $\leqq n-(v+2k+1)$. Geben wir dem ersten, dritten, fünften etc. der fehlenden Glieder das entgegengesetzte Vorzeichen, so erhalten das erste und letzte der fehlenden Glieder entgegengesetzte Zeichen (weil eine gerade Anzahl fehlt) und das letzte fehlende Glied giebt mit dem nachfolgenden einschliefsenden Gliede eine Zeichenfolge, welche die einzige unter den betrachteten $2k+2$ Gliedern ist. Demnach mufs die Anzahl der negativen Wurzeln $\leqq v+1$ sein; die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln zusammen, d. h. die Anzahl der reellen Wurzeln, ist daher $\leqq n-(v+2k+1)+v+1$ d. i. $\leqq n-2k$, und daraus folgt, dafs wenigstens $2k$ complexe Wurzeln existiren müssen.

Wenn zweitens die Grenzglieder entgegengesetzte Vorzeichen haben, so denken wir uns die fehlenden Glieder erst mit dem positiven Zeichen versehen; in den betrachteten $2k+2$ Gliedern entstehen hierdurch $2k$ Zeichenfolgen, mithin ist die Anzahl der positiven Wurzeln $\leqq n-(v+2k)$. Geben wir dagegen den fehlenden Gliedern alternirende Vorzeichen, so kommt in den fehlenden Gliedern keine Folge vor, und daher ist die Anzahl der negativen Wurzeln $\leqq v$. Die Anzahl der reellen Wurzeln mufs daher $\leqq n-(v+2k)+v$ d. h. $\leqq n-2k$ sein, woraus man wieder auf $2k$ complexe Wurzeln schliefst. Das Bisherige zusammengenommen führt zu dem Satze: Eine Gleichung, worin $2k$ auf einander folgende Glieder fehlen, besitzt wenigstens ebensoviel complexe Wurzeln.

b. Im Fall die Anzahl der fehlenden Glieder ungerade $= 2k + 1$ ist, unterscheiden wir wie vorhin, ob die einschliefsenden Glieder gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Besitzen die Grenzglieder dasselbe Vorzeichen, so denken wir uns zuerst alle fehlenden Glieder mit dem nämlichen Vorzeichen genommen; wir haben dann in $2k + 3$ Gliedern $2k + 2$ Folgen, mithin sind höchstens $n - (v + 2k + 2)$ positive Wurzeln vorhanden. Geben wir dagegen den fehlenden Gliedern alternirende Vorzeichen, so entsteht innerhalb der fehlenden Glieder keine Folge, mithin ist die Anzahl der negativen Wurzeln nicht gröfser als v. Die Anzahl der reellen Wurzeln beträgt demnach höchstens $n - (v + 2k + 2) + v = n - (2k + 2)$ und die der complexen Wurzeln wenigstens $2k + 2$.

Im Fall die Grenzglieder entgegengesetzte Zeichen haben, nehmen wir erstens alle fehlenden Glieder mit gleichen Zeichen; in $2k + 3$ Gliedern entstehen dann $2k + 1$ Folgen, woraus sich ergiebt, dafs höchstens $n - (v + 2k + 1)$ positive Wurzeln vorhanden sind. Geben wir dagegen den fehlenden Gliedern alternirende Vorzeichen, so erhalten wir jedenfalls eine Zeichenfolge, mithin höchstens $v + 1$ negative Wurzeln. Demnach wird die Zahl der reellen Wurzeln höchstens $= n - (v + 2k + 1) + v + 1 = n - 2k$, woraus mindestens $2k$ complexe Wurzeln folgen. Alles zusammen giebt den Satz: Eine Gleichung, worin $2k + 1$ aufeinander folgende Glieder fehlen, hat wenigstens $2k + 2$ oder $2k$ complexe Wurzeln, jenachdem die einschliefsenden Glieder mit gleichen oder mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind.

Man kann diese Untersuchungen leicht auf den Fall ausdehnen, wo in der gegebenen Gleichung mehr als eine Lücke vorkommt; wir überlassen dies dem Leser.

§. 10. Denkt man sich in einem Ausdrucke von der Form

$$F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k)$$

x als stetig veränderliche Gröfse und giebt ihr continuirlich alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so ändert $F(x)$ mehrmals sein Vorzeichen und geht an den Stellen $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ durch Null hindurch; daraus folgt, dafs der reciproke Werth $\frac{1}{F(x)}$ an denselben Stellen eine Unterbrechung der Continuität erleidet und entweder von $+\infty$ nach $-\infty$ oder von $-\infty$ nach $+\infty$ überspringt. Dasselbe gilt von der allgemeineren Function $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$, vorausgesetzt, dafs deren

Zähler und Nenner nicht gleichzeitig für $x = \alpha_1$, α_2 etc. verschwinden. Die hieran sich knüpfenden Fragen wollen wir genauer untersuchen, da sie offenbar in naher Beziehung zur Theorie der Gleichungen stehen; dabei mögen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ immer zwei ganze rationale und algebraische Functionen von x bedeuten, die nicht gleichzeitig verschwinden.

Wenn x das Intervall $x = a$ bis $x = b$ stetig durchläuft; so kann es geschehen, dafs der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ mehrmals, etwa m-mal, von $-\infty$ nach $+\infty$ überspringt und n-mal von $+\infty$ nach $-\infty$; die Differenz $m - n$ nennen wir dann den Excefs von $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ bezogen auf das Intervall $x = a$ bis $x = b$, und bezeichnen denselben mit

$$\overset{b}{\underset{a}{E}}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Die Function $-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, welche der vorigen gleich und entgegengesetzt ist, hat den Excefs $n - m$; daher gilt für jedes Intervall die Gleichung

$$E\left\{-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right\} = -E\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Es sei ferner

$$e = \overset{b}{\underset{a}{E}}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

und der Excefs der reciproken Function

$$e' = \overset{b}{\underset{a}{E}}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

so kann man auf folgendem Wege eine Gleichung zwischen e und e' finden. Unter der Voraussetzung, dafs die reciproke Function m'-mal von $-\infty$ nach $+\infty$ und n'-mal von $+\infty$ nach $-\infty$ überspringt, hat man gleichzeitig

$$e = m - n, \quad e' = m' - n'.$$

Die reciproke Function $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ wechselt ihr Zeichen jedesmal, wenn entweder $\varphi(x)$ oder $\psi(x)$ das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt; sie geht demnach so oft aus dem Negativen durch Null hindurch ins Positive, als ihr Zähler $\psi(x)$ denselben Weg macht, d. h. sovielmal, als die ursprüngliche Function $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ aus $-\infty$ nach $+\infty$ überschlägt, nämlich m-mal; sie geht ferner so oft aus dem Negativen durch das Unendliche hindurch ins Positive, als ihr Nenner $\varphi(x)$ vom Nega-

tiven durch Null hindurch ins Positive übertritt, d. h. m'-mal. Nennen wir daher μ die Gesammtzahl der Übergänge vom Negativen zum Positiven, so ist $\mu = m + m'$. Eine ähnliche Betrachtung gilt für die Übergänge vom Positiven zum Negativen; die Gesammtzahl derselben ist $\nu = n + n'$. Daraus folgt

$$e + e' = (m - n) + (m' - n') = (m + m') - (n + n') = \mu - \nu,$$

und es kommt nun darauf an, die Differenz $\mu - \nu$ zu ermitteln. Hierzu dient die Betrachtung der Werthe, welche der Bruch $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ an den Grenzen des Intervalles $x = a$ bis $x = b > a$ erhält. Sind nämlich $\frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$ und $\frac{\psi(b)}{\varphi(b)}$ von gleichen Vorzeichen, so gehen die Zeichenwechsel, die $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ innerhalb jenes Intervalles erleidet, entweder nach dem Schema

$$\frac{\psi(a)}{\varphi(a)} \cdots\cdots\cdots \frac{\psi(b)}{\varphi(b)},$$
$$+ - + - + - +,$$

oder auf folgende Weise:

$$\frac{\psi(a)}{\varphi(a)} \cdots\cdots\cdots \frac{\psi(b)}{\varphi(b)},$$
$$- + - + - + -,$$

und in beiden Fällen sind ebensoviel Übergänge vom Negativen zum Positiven als vom Positiven zum Negativen vorhanden; es ist daher $\mu = \nu$ und

$$e + e' = 0.$$

Wenn zweitens $\frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$ das negative, $\frac{\psi(b)}{\varphi(b)}$ das positive Zeichen hat, so gestaltet sich die Zeichenreihe folgendermaafsen

$$\frac{\psi(a)}{\varphi(a)} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{\psi(b)}{\varphi(b)},$$
$$- + - + - + - +,$$

und es ist $\mu = \nu + 1$, mithin

$$e + e' = + 1.$$

Endlich hat man bei positiven $\frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$ und negativen $\frac{\psi(b)}{\varphi(b)}$ folgende Zeichenreihe:

$$\frac{\psi(a)}{\varphi(a)} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{\psi(b)}{\varphi(b)},$$
$$+ - + - + - + -,$$

woraus folgt $\mu = \nu - 1$ und

$$c + c' = -1.$$

Das Bisherige zusammen führt zu dem Satze, dafs die Summe

$$\overset{b}{\underset{a}{E}} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} + \overset{b}{\underset{a}{E}} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

$= 0$ oder $= +1$ oder $= -1$ ist, jenachdem die Vorzeichen von $\frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$ und $\frac{\psi(b)}{\varphi(b)}$ eine Folge, oder einen Wechsel von Minus nach Plus oder einen Wechsel von Plus nach Minus bilden. Beachtet man noch die Vorzeichen der einzelnen Functionen $\varphi(a)$, $\psi(a)$, $\varphi(b)$, $\psi(b)$, so kann man folgendes Theorem aussprechen: Die Excesse der reciproken gebrochenen Functionen $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, bezogen auf das Intervall $x=a$ bis $x=b$, geben zusammen Null, wenn $\varphi(a)$ und $\psi(a)$, sowie $\varphi(b)$ und $\psi(b)$ gleichzeitig eine Folge oder gleichzeitig einen Wechsel bilden; dagegen ist jene Excefssumme $= +1$, wenn $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ einen Wechsel, $\varphi(b)$ und $\psi(b)$ eine Folge zeigen; sie ist endlich $= -1$, sobald bei $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ eine Folge, bei $\varphi(b)$ und $\psi(b)$ ein Wechsel stattfindet.

Zufolge dieses Theoremes ist

$$E \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = -E \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \varepsilon,$$

wo ε einen der Werthe 0, $+1$, -1 hat. Bedeutet nun $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ eine echt gebrochene Function, so ist $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ unecht gebrochen und kann daher durch Division in eine ganze Function Q und in einen echt gebrochenen Rest $\frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ zerlegt werden, nämlich

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = Q + \frac{\chi(x)}{\psi(x)};$$

die Function Q geht niemals durch das Unendliche hindurch, daher hat $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ denselben Excefs wie $\frac{\chi(x)}{\psi(x)}$, und es ist mit dem Vorigen zusammen

$$E \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = -E \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \varepsilon = -E \frac{\chi(x)}{\psi(x)} + \varepsilon$$

oder

$$E \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = E \left\{-\frac{\chi(x)}{\psi(x)}\right\} + \varepsilon.$$

Der Excefs der echt gebrochenen Function $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ kann dem-

nach auf den Exceſs der gleichfalls echt gebrochenen Function $\frac{\chi(x)}{\psi(x)}$, deren Nenner von niedrigerem Grade ist, zurückgeführt werden.

§. 11. Die mehrmalige Anwendung dieses Fundamentalsatzes führt zu einer allgemeinen Formel für den Exceſs einer beliebigen echt gebrochenen Function. Ist nämlich $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ die gegebene Function, so dividire man zuerst den Nenner durch den Zähler, bezeichne den ganzen Quotienten wie oben mit Q, und nenne $f_2(x)$ den mit entgegengesetzten Seiten genommenen Rest; es ist dann

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = Q - \frac{f_2(x)}{f_1(x)};$$

man wiederhole nun dieses Verfahren und bilde die ähnlichen Gleichungen

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = Q_1 - \frac{f_3(x)}{f_2(x)},$$
$$\frac{f_2(x)}{f_3(x)} = Q_2 - \frac{f_4(x)}{f_3(x)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{f_{n-2}(x)}{f_{n-1}(x)} = Q_{n-2} - \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)},$$
$$\frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)} = Q_{n-1},$$

so ist in der Reihe der Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots f_n(x)$ jede folgende von niedrigerem Grade als die vorhergehende, mithin muſs diese Reihe einmal aufhören, da Functionen negativer Grade nicht vorkommen können; ist nun $f_n(x)$ die letzte der betrachteten Functionen, so ist der letzte Quotient Q_{n-1} entweder eine ganze Function oder eine bloſse Constante. Zufolge des oben bewiesenen Fundamentalsatzes gelten jetzt folgende Gleichungen:

$$E\frac{f_1(x)}{f(x)} = E\frac{f_2(x)}{f_1(x)} + \varepsilon_0,$$
$$E\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = E\frac{f_3(x)}{f_2(x)} + \varepsilon_1,$$
$$E\frac{f_3(x)}{f_2(x)} = E\frac{f_4(x)}{f_3(x)} + \varepsilon_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$E\frac{f_{n-1}(x)}{f_{n-2}(x)} = E\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} + \varepsilon_{n-2},$$
$$E\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = E\left\{-\frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)}\right\} + \varepsilon_{n-1};$$

addirt man dieselben unter Berücksichtigung des Umstandes, dafs

$$E\left\{-\frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)}\right\}=E(-Q_{n-1})=0$$

ist, so erhält man

$$E\frac{f_1(x)}{f(x)}=\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1},$$

und es handelt sich nun darum, die Summe der Gröfsen ε_0, ε_1, ε_2, ... ε_{n-1} zu bestimmen. Wir erinnern dabei, dafs irgend eine dieser Gröfsen, z. B. ε_m, in der Gleichung

$$E\frac{f_{m+1}(x)}{f_m(x)}=E\frac{f_{m+2}(x)}{f_{m+1}(x)}+\varepsilon_m$$

vorkommt und den Werth 0 hat, wenn $f_m(a)$ und $f_{m+1}(a)$ zugleich mit $f_m(b)$ und $f_{m+1}(b)$ eine Folge oder einen Wechsel bilden, dafs dagegen $\varepsilon_m=+1$ oder $=-1$ ist, jenachdem das erste Paar einen Wechsel und das zweite eine Folge, oder das erste eine Folge und das zweite einen Wechsel giebt.

Man bilde nun die beiden Reihen

A) $f(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \dots\ f_n(a),$

B) $f(b),\ f_1(b),\ f_2(b),\ \dots\ f_n(b),$

und achte auf die Vorzeichen aller dieser Functionswerthe; die Anzahl der in A) vorkommenden Zeichenfolgen sei v_a, die Anzahl der Wechsel sei w_a, und ebenso bezeichne v_b die Anzahl der Folgen, w_b die der Wechsel in der Reihe B). Ferner ist zu unterscheiden, wie oft Folgen oder Wechsel in beiden Reihen unter einander stehen; es können nämlich zusammentreffen

in A)	*Wechsel*,	*Folge*,	*Wechsel*,	*Folge*,
in B)	*Folge*,	*Wechsel*,	*Wechsel*,	*Folge*,
	p,	q,	r,	s,

und dabei mögen die Buchstaben p, q, r, s angeben, wie oft die entsprechenden Combinationen vorkommen. Zufolge der Regel für ε_m haben p der Gröfsen ε den Werth $+1$, q derselben den Werth -1, und $r+s$ von ihnen sind $=0$; daraus folgt

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1}=p-q.$$

Ferner ist die Gesammtzahl der in A) vorkommenden Folgen $=q+s$, mithin

$$v_a=q+s,$$

und ebenso ist die Anzahl der Wechsel

$$w_a=p+r;$$

für die Reihe B) hat man analog

$$v_b=p+s,\quad w_b=q+r,$$

und diefs giebt, abgesehen vom Vorzeichen,

$$v_a - v_b = w_a - w_b = p - q,$$

mithin nach dem Vorigen

$$\overset{b}{\underset{a}{E}} \frac{f_1(x)}{f(x)} = v_a - v_b = w_a - w_b.$$

Zur Aufsuchung des Excesses einer echt gebrochenen Function dient nun folgende Regel: Aus den gegebenen Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ leite man durch die beschriebenen successiven Divisionen die neuen Functionen $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_n(x)$ ab, bilde die beiden Reihen

$$f(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \ldots\ldots f_n(a),$$
$$f(b),\ f_1(b),\ f_2(b),\ \ldots\ldots f_n(b),$$

und zähle die darin vorkommenden Zeichenfolgen v_a und v_b oder die Zeichenwechsel w_a und w_b; der Excefs von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$, bezogen auf das Intervall $x = a$ bis $x = b$, ist dann $= v_a - v_b = w_a - w_b$.

Gebrochene Coefficienten vermeidet man bei diesem Verfahren dadurch, dafs man $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, etc. mit passenden Zahlen multiplicirt, wodurch sich die Excesse nicht ändern. Beispielsweis mag der Excefs von

$$\frac{5x^4 - 30x^2 + 6}{x^5 - 10x^3 + 6x + 1}$$

für das Intervall $x = -1$ bis $x = +2$ bestimmt werden. Hier ist

$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 6x + 1,$$
$$f_1(x) = 5x^4 - 30x^2 + 6,$$
$$f_2(x) = 20x^3 - 24x - 5,$$
$$f_3(x) = 96x^2 - 5x - 24,$$
$$f_4(x) = 43651x + 10920,$$
$$f_5(x) = +13374559296;$$

für $x = -1$ sind die Werthe dieser Functionen:

$+4$, -19, -1, $+77$, -32731, $+1337\ldots\ldots$

und für $x = +2$:

-35, -34, $+107$, $+350$, $+76382$, $+1337\ldots\ldots$

Die erste Reihe enthält vier, die zweite einen Zeichenwechsel; zwischen den angegebenen Grenzen ist also der gesuchte Excefs $= 4 - 1 = 3$.

§. 12. Einer besonderen Untersuchung bedarf der specielle Fall, wo mehrere Glieder der Reihen A) und B) verschwinden. Da a und b willkürlich sind, so können dieselben immer so gewählt werden,

dafs weder $f(a)$ noch $f(b)$ den Werth Null hat; die Frage ist dann, wie sich die Sache für die übrigen Functionen gestaltet.

Im Fall es einen Specialwerth $x=\xi$ giebt, für welchen zwei benachbarte Functionen $f_m(x)$ und $f_{m+1}(x)$ gleichzeitig verschwinden, bedarf es nur der Erinnerung an die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(\xi) &= Qf_1(\xi) - f_2(\xi), \\ f_1(\xi) &= Q_1 f_2(\xi) - f_3(\xi), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_{m-1}(\xi) &= Q_{m-1} f_m(\xi) - f_{m+1}(\xi), \\ f_m(\xi) &= Q_m f_{m+1}(\xi) - f_{m+2}(\xi), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_{n-2}(\xi) &= Q_{n-2} f_{n-1}(\xi) - f_n(\xi), \end{aligned}$$

um einzusehen, dafs alle vorhergehenden und alle nachfolgenden Functionen gleichzeitig verschwinden müssen, dafs also $f(\xi)=0$ ist. Zufolge der gemachten Voraussetzung hat aber weder $f(a)$ noch $f(b)$ den Werth Null, mithin können $f_m(x)$ und $f_{m+1}(x)$ weder für $x=a$ noch für $x=b$ gleichzeitig verschwinden. In den Reihen A) und B) sind also zwei benachbarte Glieder nie gleichzeitig Null.

Wenn nur $f_m(\xi)$ verschwindet, so folgt $f_{m-1}(\xi) = - f_{m+1}(\xi)$; d. h. die beiden Glieder, zwischen denen ein Glied wegfällt, besitzen entgegengesetzte Vorzeichen.

Hiernach ist der Fall leicht zu beurtheilen, wo in der einen Reihe ein Glied, in der anderen keines fehlt. Wenn nämlich $f_m(a)=0$ ist, so folgen die drei Glieder $f_{m-1}(a)$, $f_m(a)$, $f_{m+1}(a)$ entweder mit den Zeichen $+$, 0, $-$, oder mit den Zeichen $-$, 0, $+$, aufeinander, und wenn man der Null einmal das positive, das andere Mal das negative Zeichen ertheilt, so hat man folgende vier Fälle:

$$\begin{matrix} +, & +, & -; & \quad -, & +, & +. \\ +, & -, & -; & \quad -, & -, & +. \end{matrix}$$

Jede dieser Combinationen enthält einen einzigen Zeichenwechsel und liefert daher beim Zählen der Zeichenwechsel einen Beitrag $=1$. Überspringt man dagegen das fehlende Glied ohne Weiteres, so giebt jede Combination gleichfalls nur einen Zeichenwechsel, und es ist daher für die Anzahl der Wechsel (nicht aber der Folgen) ganz gleichgültig, ob man dem fehlenden Gliede irgend ein Vorzeichen ertheilt und es mitrechnet, oder ob man es unbeachtet läfst. Dafs die Sache sich ebenso verhält, wenn mehrere nicht benachbarte Functionen in A) ausfallen, ist leicht einzusehen; dasselbe gilt von der Reihe B). Die im vorigen Paragraphen aufgestellte Regel zur Excefsbestimmung bleibt daher, auch wenn die Reihen A) und B) Lücken enthalten,

ganz ungestört, sobald man nicht die Folgen, sondern die Wechsel zählt; nur müssen a und b so gewählt sein, dafs weder $f(a)$ noch $f(b)$ verschwindet.

§. 13. Um nun die Theorie des Excesses auf die Gleichungen anzuwenden, kehren wir zur Formel 7) in §. 5 zurück. Setzen wir zur Abkürzung

1) $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$

2) $f_1(x) = n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \ldots + 1 a_{n-1},$

und bezeichnen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, so haben wir nach der genannten Formel

$$3) \qquad \frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x - \alpha_n},$$

und dabei sind alle Nenner von einander verschieden, wenn α_1, α_2, $\ldots \alpha_n$ von einander verschieden sind, was wir für jetzt immer voraussetzen wollen. Irgend eine der Wurzeln sei α_k und es bezeichne δ eine sehr kleine Zahl wenigstens kleiner als die kleinste aller Wurzeldifferenzen; läfst man nun x von $x = \alpha_k - \delta$ bis $x = \alpha_k + \delta$ sich stetig ändern, so erleidet der Bruch $\frac{1}{x - \alpha_k}$ an der Stelle $x = \alpha_k$ eine Unterbrechung der Continuität und springt von $-\infty$ nach $+\infty$ über, während alle übrigen Brüche endliche Gröfsen bleiben; die gebrochene Function $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ geht daher gleichfalls für $x = \alpha_k$ von $-\infty$ nach $+\infty$ über. Umgekehrt ist auch leicht zu sehen, dafs diese sprungweise Änderung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ nur dann eintreten kann, wenn x einen der verschiedenen Werthe α_1, α_2, $\ldots \alpha_n$ erhält. Wenn nun x ein willkürlich gewähltes Intervall $x = a$ bis $x = b$ stetig durchläuft und dabei $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ mehrmals, etwa m-mal, von $-\infty$ nach $+\infty$ überspringt, so müssen auch m der Gröfsen α_1, α_2, $\ldots \alpha_n$ zwischen $x = a$ und $x = b$ enthalten sein, d. h. in dem Intervalle $x = a$ bis $x = b$ liegen nothwendig ebensoviel von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, als der entsprechende Excefs von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ beträgt.

Läfst man z. B. x das reelle Intervall $x = 0$ bis $x = +\infty$ durchlaufen, so erhält man die Gesammtzahl der positiven Wurzeln

$$p = \overset{+\infty}{\underset{0}{E}} \frac{f_1(x)}{f(x)};$$

ebenso ist die Anzahl der negativen Wurzeln

$$q = \underset{-\infty}{\overset{0}{E}} \frac{f_1(x)}{f(x)},$$

mithin die Anzahl der reellen Wurzeln $= p + q$ und die Anzahl der imaginären $= n - (p + q)$.

Um diefs auf die Gleichung

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$$

anzuwenden, hat man noch Formel 2)

$$f_1(x) = 5x^4 - 30x^2 + 6$$

und wie im vorigen Paragraphen

$$f_2(x) = 20x^3 - 24x - 5,$$
$$f_3(x) = 96x^2 - 5x - 24,$$
$$f_4(x) = 43651x + 10920,$$
$$f_5(x) = 13374559296.$$

Setzt man der Reihe nach

$x = -\infty, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +\infty,$

so erhalten die obigen Functionen folgende Zeichen:

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	5 Wechsel
-4	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	5 -
-3	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4 -
-2	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	4 -
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	4 -
0	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	2 -
$+1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	1 -
$+2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	1 -
$+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	1 -
$+4$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0 -
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0 -

Zwischen $x = -4$ und $x = -3$ liegt demnach eine Wurzel, weil im letzteren Falle ein Zeichenwechsel weniger vorhanden ist; zwischen $x = -1$ und $x = 0$ liegen zwei Wurzeln, zwischen $x = 0$ und $x = +1$ ist eine, zwischen $x = +3$ und $x = +4$ wieder eine Wurzel enthalten. Die Gleichung besitzt demnach drei negative und zwei positive Wurzeln, mithin keine complexe Wurzel.

§. 14. Wir haben im Vorigen immer angenommen, dafs sämmtliche Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ von einander verschieden sind, es ist daher noch zu untersuchen, wie sich die Sache in dem Falle gestaltet, wo unter den Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ mehrere gleiche vor-

kommen. Gesetzt nun, es wären nur k von einander verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ vorhanden, so würde jede derselben mehrmals zu zählen sein, und dann hätte $f(x)$ die Form

$$f(x) = (x - \alpha_1)^p (x - \alpha_2)^q \ldots (x - \alpha_k)^s,$$

worin die ganzen positiven Zahlen p, q, r etc. angeben, wie oft α_1, α_2, α_3 etc. vorkommen. Aus der vorigen Gleichung erhält man

$$\frac{lf(x+\vartheta) - lf(x)}{\vartheta} = \frac{p}{\vartheta} l\left(1 + \frac{\vartheta}{x - \alpha_1}\right) + \frac{q}{\vartheta} l\left(1 + \frac{\vartheta}{x - \alpha_2}\right) + \cdots$$

und hier läfst sich der Übergang zur Grenze für verschiedene ϑ nach demselben Verfahren wie in §. 5 ausführen. Auf der linken Seite bedarf es gar keiner Änderung, rechter Hand ist nur zu bemerken, dafs die Logarithmen mit den Coefficienten p, q, etc. versehen sind, während sie in §. 5 die Einheit zum gemeinschaftlichen Coefficienten hatten; nach diesen Bemerkungen gelangt man zu der Formel

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{p}{x - \alpha_1} + \frac{q}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{s}{x - \alpha_k}.$$

Denkt man sich Alles auf gleichen Nenner gebracht, so erhält man zum Zähler eine ganze Function $(k-1)$ten Grades, welche kurz $\psi(x)$ heifsen möge, also

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{\psi(x)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k)};$$

und endlich folgt durch Multiplication mit No. 4)

5) $$f_1(x) = \psi(x) \cdot (x - \alpha_1)^{p-1} (x - \alpha_2)^{q-1} \ldots (x - \alpha_k)^{s-1}.$$

Der Vergleich von No. 4) und No. 5) zeigt augenblicklich, dafs bei mehreren gleichen Wurzeln die Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ einen gröfsten gemeinschaftlichen Theiler haben, denn in der That läfst sich sowohl $f(x)$ als $f_1(x)$ durch die Function

$$(x - \alpha_1)^{p-1} (x - \alpha_2)^{q-1} \ldots . (x - \alpha_k)^{s-1}$$

ohne Rest dividiren.

Der hierin liegende Satz gestattet sehr leicht die Umkehrung. Wenn nämlich $f(x)$ und $f_1(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so würde die Annahme, dafs gleiche Wurzeln vorkommen und dafs demgemäfs $f(x)$ unter der Form 4) enthalten sei, zur Gleichung 5) führen; diefs gäbe dann einen gemeinschaftlichen Theiler, was der Voraussetzung widerspricht. Man hat daher folgendes Theorem: die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt gleiche oder verschiedene Wurzeln, jenachdem ein gemeinschaftlicher Theiler von $f(x)$ und $f_1(x)$ existirt oder nicht existirt.

Um nun zu untersuchen, ob $f(x)$ und $f_1(x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben oder nicht, gehen wir wieder auf die in §. 11

aufgestellten Gleichungen zurück, welche das Bildungsgesetz der Functionen $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_n(x)$ enthalten. Setzen wir voraus, dafs $f(x)$ vom $n$ten Grade sei, so ist $f_1(x)$ vom $(n-1)$ten Grade, $f_2(x)$ vom $(n-2)$ten Grade u. s. w., mithin $f_n(x)$ vom nullten Grade, d. h. eine Constante, wie das im vorigen Paragraphen gegebene Beispiel zeigt. Möglicherweise könnte aber die Reihe der Functionen $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_n(x)$ schon früher abbrechen und wenn z. B. $f_{m+1}(x)=0$ ist, so würden die erwähnten Gleichungen folgendermaafsen lauten:

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = Q - \frac{f_2(x)}{f_1(x)},$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = Q_1 - \frac{f_3(x)}{f_2(x)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f_{m-3}(x)}{f_{m-2}(x)} = Q_{m-3} - \frac{f_{m-1}(x)}{f_{m-2}(x)},$$

$$\frac{f_{m-2}(x)}{f_{m-1}(x)} = Q_{m-2} - \frac{f_m(x)}{f_{m-1}(x)},$$

$$\frac{f_{m-1}(x)}{f_m(x)} = Q_{m-1}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dafs $f_m(x)$ in $f_{m-1}(x)$ aufgeht; multiplicirt man die vorhergehende Gleichung mit $f_{m-1}(x)$ und dividirt mit $f_m(x)$, so wird

$$\frac{f_{m-2}(x)}{f_m(x)} = Q_{m-2}\frac{f_{m-1}(x)}{f_m(x)} - 1 = Q_{m-2}\, Q_{m-1} - 1$$

d. h. $f_m(x)$ geht in $f_{m-2}(x)$ auf. Die drittletzte Gleichung giebt

$$\frac{f_{m-3}(x)}{f_m(x)} = Q_{m-3}\frac{f_{m-2}(x)}{f_m(x)} - \frac{f_{m-1}(x)}{f_m(x)}$$

$$= Q_{m-3}\,(Q_{m-2}\, Q_{m-1} - 1) - Q_{m-1}$$

und sie zeigt, dafs $f_m(x)$ in $f_{m-3}(x)$ aufgeht. Die Fortsetzung dieser Schlüsse lehrt, dafs $f_m(x)$ in allen vorhergehenden Functionen, mit Einschlufs von $f(x)$, aufgeht, dafs also $f_m(x)$ gemeinschaftlicher Theiler von $f(x)$ und $f_1(x)$ ist.

Wenn dagegen keine der Functionen $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_n(x)$ verschwindet, so kann man die Nichtexistenz eines gemeinschaftlichen Theilers von $f(x)$ und $f_1(x)$ durch folgende Schlüsse darthun. Gesetzt, die Function $\chi(x)$ ginge sowohl in $f(x)$ als in $f_1(x)$ auf, so wäre nach der ersten Gleichung

$$\frac{f(x)}{\chi(x)} = Q\frac{f_1(x)}{\chi(x)} - \frac{f_2(x)}{\chi(x)};$$

der Voraussetzung gemäfs sind hier $\frac{f(x)}{\chi(x)}$ und $\frac{f_1(x)}{\chi(x)}$ ganze Functio-

nen, mithin mufs auch $\frac{f_2(x)}{\chi(x)}$ eine solche sein, d. h. $\chi(x)$ in $f_2(x)$ aufgehen. Die zweite Gleichung giebt

$$\frac{f_1(x)}{\chi(x)} = Q_1 \frac{f_2(x)}{\chi(x)} - \frac{f_3(x)}{\chi(x)},$$

und hier zeigen ganz ähnliche Schlüsse wie vorhin, dafs $f(x)$ in $f_3(x)$ aufgehen mufs. Auf diese Weise fortfahrend, gelangt man zu dem Ergebnisse, dafs $\chi(x)$ in allen den Functionen $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_n(x)$ gleichzeitig aufgehen mufs. Diefs ist aber, weil $f_n(x)$ einen constanten Werth besitzt, nur dann möglich, wenn $\chi(x)$ eine Constante, d. h. keine Function von x ist; dann existirt aber auch kein gemeinschaftlicher Theiler in dem hier genommenen Sinne.

Das Verfahren der successiven Divisionen entscheidet also nicht nur, ob die Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben oder nicht, sondern es liefert zugleich diesen Theiler selbst, und zwar ist leicht zu sehen, dafs es aufser $f_m(x)$ keine Function höheren Grades geben kann, welche gleichzeitig in $f(x)$ und $f_1(x)$ aufgeht. Da hiernach $f_m(x)$ der gröfste gemeinschaftliche Theiler von $f(x)$ und $f_1(x)$ ist, so hat man durch Vergleichung mit dem Vorigen

$$f_m(x) = (x - \alpha_1)^{p-1} (x - \alpha_2)^{q-1} \dots (x - \alpha_k)^{s-1},$$

mithin

$$\frac{f(x)}{f_m(x)} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k).$$

Die Gleichung

$$\frac{f(x)}{f_m(x)} = 0$$

enthält dieselben Wurzeln wie $f(x) = 0$, aber jede der von einander verschiedenen Wurzeln nur einmal; setzt man also $\frac{f(x)}{f_m(x)} = \varphi(x)$ und behandelt diese Gleichung $\varphi(x) = 0$ nach der Methode der successiven Divisionen, so erhält man Aufschlufs über die Anzahl und Lage der von einander verschiedenen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

Als Beispiel diene

$$f(x) = x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 6x^4 - 15x^3 - 3x^2 + 8x + 4.$$

Hier ist, abgesehen von constanten Factoren,

$$f_1(x) = 7x^6 + 30x^5 + 30x^4 - 24x^3 - 45x^2 - 6x + 8,$$
$$f_2(x) = 11x^5 + 46x^4 + 50x^3 - 20x^2 - 61x - 26,$$
$$f_3(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2,$$
$$f_4(x) = 0,$$

mithin $f_3(x)$ der gröfste gemeinschaftliche Theiler von $f(x)$ und $f_1(x)$. Weiter hat man

$$\frac{f(x)}{f_3(x)} = x^3 + 2x^2 - x - 2 = \varphi(x);$$

die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ sind $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$, daher

$$\varphi(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2),$$

$$f(x) = \varphi(x) \cdot f_3(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2).$$

Setzt man den Factor $f_3(x) = 0$, so erhält man die übrigen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ und zusammen

$$f(x) = (x - 1)^2 (x + 1)^3 (x + 2)^2.$$

Die vollständige Discussion einer Gleichung mit Hülfe der successiven Divisionen und der Bestimmung des Excesses von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ ist zuerst von K. Sturm gezeigt worden, wefshalb die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ den Namen Sturm'sche Reste führen. Auch für die complexen Wurzeln läfst sich eine ähnliche Untersuchung anstellen, hinsichtlich deren wir auf die Quelle verweisen: *Sur la détermination du nombre des racines etc. par* M. Moigno, in Liouville's Journal, Jahrgang 1840, S. 75.

III. Die numerische Auflösung der höheren Gleichungen.

§. 15. Wenn die Coefficienten der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

ganze Zahlen sind, so zeigen folgende Schlüsse, dafs x keinen rationalen gebrochenen Werth $\frac{p}{q}$ haben kann, worin p und q relative Primzahlen bedeuten. Die Substitution des angegebenen Werthes liefert nämlich

$$a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + a_3 p^{n-3} q^2 + \dots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1} = -\frac{p^n}{q};$$

die linke Seite dieser Gleichung ist ein Aggregat von ganzen Zahlen, mithin selbst eine ganze Zahl; rechter Hand steht ein irreducibeler Bruch, weil q nicht in p und ebensowenig in p^n aufgeht. Zwischen einer ganzen Zahl und einem irreducibelen Bruche kann aber keine Gleichung bestehen, mithin ist die Annahme $x = \frac{p}{q}$ unrichtig, wofern nicht entweder $q = 1$ ist oder p und q gleichzeitig unendlich grofs sind. Eine Gleichung mit ganzen Coefficien-

ten hat daher entweder ganze oder irrationale oder complexe Wurzeln.

Das Vorhandensein von ganzen Wurzeln läſst sich mittelst der Bemerkung erkennen, daſs der letzte Coefficient a_n dem Producte aller Wurzeln gleich ist, daſs also die ganzen Wurzeln unter den Theilern von a_n vorkommen müssen. Man versucht daher, ob die Factoren von a_n der Gleichung genügen; ist dieſs mit dem einen oder anderen der Fall, so erniedrigt man den Grad der Gleichung durch Division mit dem Unterschiede zwischen x und der gefundenen Wurzel. Genügt keiner der Factoren, so hat die Gleichung nur irrationale oder imaginäre Wurzeln.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$f(x) = x^5 - 10x^4 + 26x^3 - 23x^2 + 22x + 6 = 0;$$

hier sind die Theiler von 6 zu versuchen, nämlich

$$x = \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3,$$

wobei sich zeigt, daſs nur die Annahme $x = +3$ der Gleichung genügt; dieſs giebt

$$\frac{f(x)}{x-3} = x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 8x - 2,$$

$$f(x) = (x-3)(x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 8x - 2).$$

Um die übrigen Wurzeln zu finden, setzt man

$$x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 8x - 2 = 0$$

und erhält nach bekannten Methoden

$$x = 3 \pm \sqrt{11}, \quad x = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3};$$

die fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung sind daher

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 3 + \sqrt{11}, \quad x_3 = 3 - \sqrt{11},$$

$$x_4 = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad x_5 = \tfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

Wenn die Coefficienten der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

rationale Brüche sind, so kann man dieselben auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen, welcher μ heiſsen möge, so daſs etwa

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\mu}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2}{\mu}, \quad a_3 = \frac{\alpha_3}{\mu} \ldots$$

ist. In der nunmehrigen Gleichung

$$x^n + \frac{\alpha_1}{\mu} x^{n-1} + \frac{\alpha_2}{\mu} x^{n-2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{\mu} x + \frac{\alpha_n}{\mu} = 0$$

sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und μ ganze Zahlen, und wenn man

$$x = \frac{\xi}{\mu}$$

setzt, so erhält man nach Multiplication mit μ^n

$$\xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \alpha_2 \mu \xi^{n-2} + \alpha_3 \mu^2 \xi^{n-3} + \dots$$
$$\dots + \alpha_{n-1} \mu^{n-2} \xi + \alpha_n \mu^{n-1} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt ganze Coefficienten und kann nach der vorigen Methode behandelt werden; jedem ξ entspricht dann ein x, welches der μ-te Theil von ξ ist.

Beispielweis sei

$$x^5 - \frac{8}{3} x^4 + \frac{13}{4} x^3 - \frac{13}{12} x^2 - \frac{1}{3} x + \frac{1}{6} = 0;$$

hier ist $\mu = 12$, und die Substitution $x = \frac{1}{12} \xi$ giebt

$$F(\xi) = \xi^5 - 32\xi^4 + 468\xi^3 - 1872\xi^2 - 6912\xi + 41472 = 0.$$

Von den Factoren der Zahl 41472 genügen $\xi = -4$ und $\xi = +6$ der vorstehenden Gleichung; weiter hat man

$$\frac{F(\xi)}{(\xi + 4)(\xi - 6)} = \xi^3 - 30\xi^2 + 432\xi - 1728$$

und da der Ausdruck rechter Hand für $\xi = 6$ verschwindet, so ist $\xi = 6$ eine neue Wurzel der Gleichung und

$$\frac{F(\xi)}{(\xi + 4)(\xi - 6)^2} = \xi^2 - 24\xi + 288.$$

Die Auflösung der noch übrigen quadratischen Gleichung giebt $\xi = 12(1 \pm i)$; die fünf Werthe von x sind demnach

$$-\tfrac{1}{3}, \quad +\tfrac{1}{2}, \quad +\tfrac{1}{2}, \quad 1 + i, \quad 1 - i.$$

§. 16. Hat man nach der vorigen Methode die etwa vorhandenen ganzen Wurzeln einer Gleichung ausgeschieden, so besteht das nächste Geschäft darin, die noch übrige Gleichung von den etwaigen gleichen Wurzeln zu befreien (§. 14), so dafs man zu einer Gleichung gelangt, deren Wurzeln sämmtlich von einander verschieden und entweder irrational oder complex sind. Im Folgenden beschäftigen wir uns immer nur mit derartig vereinfachten Gleichungen.

Durch Entwickelung der Sturm'schen Reste und Substitution beliebiger Werthe von x lassen sich die Grenzen, zwischen denen die reellen Wurzeln der Gleichung liegen, beliebig eng ziehen und daher kann man auch für die gerade aufzusuchende Wurzel einen vorläufigen Näherungswerth finden, der x_1 heifsen möge. Der genaue Werth des x differirt hiervon nur wenig und mag mit $x_1 + \delta$ bezeichnet werden, wobei δ die erforderliche kleine Correction bedeutet. Ist nun

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

die gegebene Gleichung, so mufs wegen $x = x_1 + \delta$ ferner sein

$$f(x_1 + \delta) = (x_1 + \delta)^n + a_1 (x_1 + \delta)^{n-1} + a_2 (x_1 + \delta)^{n-2} + \dots$$
$$\dots + a_{n-1}(x_1 + \delta) + a_n = 0$$

d. i. wenn Alles nach Potenzen von δ geordnet wird,

$$\begin{aligned} & x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_1 + a_n \\ & + [n x_1^{n-1} + (n-1) a_1 x_1^{n-2} + (n-2) a_2 x_1^{n-3} + \ldots + 1 a_{n-1}] \delta \\ & + \tfrac{1}{2} [n(n-1) x_1^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x_1^{n-3} + \ldots + 2 \cdot 1 a_{n-2}] \delta^2 \\ & + \ldots \\ & = 0. \end{aligned}$$

Die erste Zeile stellt den Werth dar, welchen $f(x)$ im Falle $x = x_1$ erhält, und ist daher mit $f(x_1)$ zu bezeichnen; die Coefficienten von δ, $\frac{1}{2}\delta^2$, etc. sind gewisse ganze Functionen von x_1, die zur Abkürzung $f'(x_1)$, $f''(x_1)$, etc. heifsen mögen, und wobei besonders hervorgehoben werden mufs, dafs $f'(x)$ identisch mit der Function $f_1(x)$ ist, welche in dem Sturm'schen Satze vorkommt. Aus der nunmehrigen Gleichung

$$f(x_1) + f'(x_1)\delta + \tfrac{1}{2} f''(x_1)\delta^2 + \ldots = 0,$$

worin x_1 bekannt, dagegen δ unbekannt ist, läfst sich δ zwar nicht genau, aber doch näherungsweise finden. Weifs man nämlich im voraus, dafs $\delta < \frac{1}{10}$, mithin $\delta^2 < \frac{1}{100}$, $\delta^3 < \frac{1}{1000}$ etc. ist, so hat die Summe

$$\tfrac{1}{2} f''(x_1)\delta^2 + \tfrac{1}{6} f'''(x_1)\delta^3 + \ldots.$$

keinen bedeutenden Einflufs auf die 2te Decimalstelle und daher ist $f(x_1) + f'(x_1)\,\delta$ nahezu $= 0$. Der hieraus folgende Werth von δ mag, weil er nicht absolut genau ist, mit δ_1 bezeichnet werden; man hat für ihn

$$\delta_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Setzt man in der Gleichung $x = x_1 + \delta$ für δ den gefundenen Näherungswerth, so erhält man einen zweiten Näherungswerth für x, nämlich

$$x_2 = x_1 + \delta_1,$$

der, unter der Voraussetzung $\delta < \frac{1}{10}$, im Allgemeinen auf 2 Decimalen richtig ist. Man wiederholt nun dasselbe Verfahren, d. h. man betrachtet x_2 als anfänglichen Näherungswerth, bestimmt die zugehörige Correction

$$\delta_2 = -\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

und gelangt zu einem dritten Näherungswerth

$$x_3 = x_2 + \delta_2,$$

der im Allgemeinen 4 richtige Decimalen zählt. So fortgehend kann man der Reihe nach 8, 16, 32 etc. richtige Decimalstellen finden.

Bei diesem Verfahren ist es der Sicherheit wegen unerläfslich, jeden gefundenen Näherungswerth zu prüfen, was auf folgende Weise

geschieht. Da x einen irrationalen Werth hat, so besteht die gesuchte Wurzel aus einer ganzen Zahl ε und den unendlich vielen Decimalen ζ_1, ζ_2, ζ_3, etc., es ist also

$$x = \varepsilon + \frac{\zeta_1}{10} + \frac{\zeta_2}{10^2} + \frac{\zeta_3}{10^3} + \ldots;$$

ein gefundener Näherungswerth von x ist nun auf k Decimalstellen richtig, wenn der wahre Werth von x zwischen

$$\varepsilon + \frac{\zeta_1}{10} + \frac{\zeta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\zeta_k}{10^k}$$

und

$$\varepsilon + \frac{\zeta_1}{10} + \frac{\zeta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\zeta_k + 1}{10^k}$$

liegt. Um diefs zu erfahren, braucht man nur die beiden vorstehenden Näherungswerthe von x in $f(x)$ zu substituiren und auf die entstehenden Vorzeichen von $f(x)$ zu achten. Sind nämlich diese Vorzeichen entgegengesetzt, so liegt in der That x zwischen jenen Werthen, weil $f(x)$ sein Vorzeichen nur mittelst Durchganges durch Null ändern kann.

Diese von Newton herrührende Methode wird an folgendem Beispiele klar werden. Es sei

$$f(x) = x^5 - 6x - 10 = 0,$$
$$f'(x) = 5x^4 - 6;$$

durch Versuche findet man leicht, dafs eine Wurzel dieser Gleichung zwischen 1,8 und 1,9 liegt; es ist daher

$$x_1 = 1{,}8;$$
$$\delta_1 = -\frac{f(1{,}8)}{f'(1{,}8)} = -\frac{-1{,}904}{+46{,}488} = +0{,}04,$$
$$x_2 = 1{,}8 + 0{,}04 = 1{,}84.$$

Die Substitution dieses Werthes macht $f(x)$ positiv, dasselbe findet statt für $x = 1{,}85$, dagegen giebt $x = 1{,}83$ einen negativen Werth; es ist nämlich

$$f(1{,}84) = +0{,}0506,$$
$$f(1{,}83) = -0{,}4563,$$

mithin liegt die gesuchte Wurzel zwischen 1,83 und 1,84 und zwar näher an der letzten Zahl als an der ersten. Man hat weiter, von $x_2 = 1{,}84$ ausgehend,

$$\delta_2 = -\frac{f(1{,}84)}{f'(1{,}84)} = -\frac{0{,}0506}{51{,}3114} = -0{,}00099,$$
$$x_3 = 1{,}84 - 0{,}00099 = 1{,}83901,$$

und zur Controle:

$$f(1,83901) = -0,00013,$$
$$f(1,83902) = +0,00043,$$

woraus hervorgeht, dafs x zwischen 1,83901 und 1,83902 liegt. Die Berechnung des vierten Näherungswerthes giebt

$$\delta_3 = -\frac{f(1,83901)}{f'(1,83901)} = -\frac{-0,00013}{+51,18820} = +0,0000025,$$
$$x_4 = 1,8390125,$$

welcher Werth bereits auf sieben Decimalen genau ist.

Das hiermit auseinander gesetzte Verfahren gestattet noch einige Modificationen, wodurch es bequemer für den praktischen Gebrauch wird; um diefs zeigen zu können, müssen wir in den beiden nächsten Paragraphen Einiges vorausschicken.

§. 17. Setzt man

1) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

so ist die Differenz $f(x) - f(r)$ ohne Rest durch $x = r$ theilbar (§. 2), und der Quotient bildet eine ganze Function $(n-1)$ten Grades; man hat also

$$\frac{f(x) - f(r)}{x - r} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}$$

oder

2) $$\frac{f(x)}{x - r} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1} + \frac{f(r)}{x - r}.$$

Diese Gleichung läfst sich auch folgendermaafsen aussprechen: wenn $f(x)$ durch $x - r$ dividirt wird, so besteht das Resultat aus einer ganzen Function nächst niedrigeren Grades und aus einem Reste $f(r)$, welcher den Specialwerth darstellt, den $f(x)$ für $x = r$ erhält. Man würde demnach $f(r)$ finden können, wenn man jene Division auf irgend eine einfache Weise auszuführen wüfste. Aus No. 2) folgt aber durch Multiplication mit $x - r$

$$\begin{aligned} f(x) = b_0 x^n &+ b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x \\ &- b_0 r x^{n-1} - b_1 r x^{n-2} - \ldots - b_{n-2} r x \\ &- b_{n-1} r + f(r) \end{aligned}$$

und nun giebt der Vergleich mit No. 1)

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 + b_0 r, \quad b_2 = a_2 + b_1 r, \ \ldots .$$
$$\ldots b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2} r, \quad f(r) = a_n + b_{n-1} r.$$

Hieraus entspringt folgende Rechnungsvorschrift: man schreibe die Coefficienten a_0, a_1, ... a_n nebst ihren Vorzeichen in eine Horizontalreihe, multiplicire den ersten Coefficienten mit r, setze das Product unter den nächsten Coefficienten a_1 und addire beides; die Summe multiplicire man wieder mit r, schreibe das Product unter a_2

und addire u. s. w.; die entstehenden Summen sind die Coefficienten b_1, b_2, etc. und die letzte Summe ist der Rest oder der Functionswerth $f(r)$.

Soll z. B. die Function

$$f(x) = x^5 - 11x^4 + 79x^2 - 16x - 2$$

durch $x - 3$ dividirt werden, so ist die Rechnung:

$+1$,	-11,	0,	$+79$,	-16,	-2,
	$+3$,	-24,	-72,	$+21$,	$+15$,
$+1$,	-8,	-24,	$+7$,	$+5$,	$+13$;

man hat folglich

$$\frac{f(x)}{x-3} = x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 7x + 5 + \frac{13}{x-3}$$

und zugleich

$$f(3) = +13.$$

Dafs diese Methode selbst bei gebrochenen a_0, a_1, ... a_n und r immer noch kürzer als die gewöhnliche Division ist, mag folgendes Beispiel zeigen. Es sei

$$f(x) = 52x^3 - 3,25x^2 + 47x - 73,084$$

durch $x - 15,231$ zu dividiren und sowohl der Quotient als der Rest auf drei Decimalstellen zu berechnen. Man hat in diesem Falle

52;	$-3,250$,	$+27$;	$-73,084$;
	761,55	7887,62	120606,34
	30,462	3943,810	60303,170
	792,012	157,752	2412,127
		23,663	361,819
		0,789	12,061
		12013,634	183695,517
52;	$+788,762$;	$+12060,634$;	$+183622,433$;

$$\frac{52x^3 - 3,25x^2 + 47x - 73,084}{x - 15,231}$$

$$= 52x^2 + 788,762x + 12060,634 + \frac{183622,433}{x - 15,231},$$

$$f(15,231) = +183622,433.$$

§. 18. An das Vorige knüpft sich eine Aufgabe, welche im Folgenden sehr oft vorkommen wird, nämlich diejenige Gleichung

$$\alpha_0 \xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \alpha_2 \xi^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} \xi + \alpha_n = 0$$

zu finden, deren Wurzeln um eine gegebene Gröfse r kleiner sind als die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Der gestellten Forderung nach soll $\xi = x - r$ sein, mithin ist

$$\alpha_0 (x-r)^n + \alpha_1 (x-r)^{n-1} + \alpha_2 (x-r)^{n-2} + \dots$$
$$\dots + \alpha_{n-1} (x-r) + \alpha_n = f(x),$$

und hieraus folgt für $x = r$

$$\alpha_n = f(r).$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorigen und dividirt mit $x - r$, so erhält man rechter Hand einen ganzen Quotienten, welcher $\varphi(x)$ heifsen möge, also

$$\alpha_0 (x-r)^{n-1} + \alpha_1 (x-r)^{n-2} + \alpha_2 (x-r)^{n-3} + \dots$$
$$\dots + \alpha_{n-2} (x-r) + \alpha_{n-1} = \varphi(x)$$

und für $x = r$

$$\alpha_{n-1} = \varphi(r).$$

Hier wiederholt sich dasselbe Verfahren; man zieht diese Gleichung von der vorigen ab, dividirt mit $x - r$, nimmt $x = r$ und erhält, wenn $\psi(x)$ den ganzen Quotienten bezeichnet,

$$\alpha_{n-2} = \psi(r) \text{ u. s. w.}$$

Nach dem im vorigen Paragraphen entwickelten Satze ist $f(r)$ identisch mit dem Reste bei der Division von $f(x)$ durch $x - r$, ebenso ist $\varphi(r)$ der Rest bei der Division von $\varphi(x)$ durch $x - r$ u. s. w.; die gesuchten Coefficienten α_n, α_{n-1}, α_{n-2} etc. sind also die Reste, welche entstehen, wenn $f(x)$ durch $x - r$, der ganze Quotient wieder durch $x - r$, der darauf folgende ganze Quotient gleichfalls durch $x - r$ dividirt und auf diese Weise fortgefahren wird. Die ganze Reihe dieser Division läfst sich nach dem vorhin gezeigten Verfahren ausführen und damit die ganze Rechnung auf einen einfachen Mechanismus zurückbringen.

Beispielweis mag aus der Gleichung

$$x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 7x + 130 = 0$$

eine neue Gleichung

$$\xi^4 + \alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi + \alpha_4 = 0$$

hergeleitet werden, deren Wurzeln ξ um 3 kleiner als x sind; man hat dann folgende Rechnung

$+1,$	$-10,$	$+6,$	$+7,$	$+130;$	$r = 3$
	$+3,$	$-21,$	$-45,$	$-114,$	
$+1,$	$-7,$	$-15,$	$-38,$	$+16 = \alpha_4;$	
	$+3,$	$-12,$	$-81,$		
$+1,$	$-4,$	$-27,$	$-119 = \alpha_3;$		
	$+3,$	$-3,$			
$+1,$	$-1,$	$-30 = \alpha_2;$			
	$+3,$				
$+1,$	$+2 = \alpha_1,$				

mithin ist die gesuchte Gleichung

$$\xi^4 + 2\xi^3 - 30\xi^2 - 119\xi + 16 = 0.$$

Nach demselben Verfahren kann man die abgeleitete Gleichung

$$\alpha_0 \xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \alpha_2 \xi^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\xi + \alpha_n = 0$$

auch so einrichten, dafs $\alpha_1 = 0$ wird. Aus der ursprünglichen Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

folgt nämlich, wenn man $\xi = x - r$ oder $x = \xi + r$ setzt,

$$a_0 \xi^n + (a_1 + n a_0 r)\xi^{n-1} + \ldots. = 0,$$

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_1 = a_1 + n a_0 r, \ \ldots.$$

und hier wird $\alpha_1 = 0$ für

$$r = -\frac{a_1}{n a_0},$$

mithin sind in diesem Falle successive Divisionen mit $x + \frac{a_1}{n a_0}$ vorzunehmen. Für die Gleichung z. B.

$$x^5 - 10x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 61x + 43 = 0$$

ist $x - 2$ der fortwährende Divisor und giebt folgende Rechnung:

+ 1,	− 10,	− 7,	+ 8,	+ 61,	+ 43;	$r = 2$;
	+ 2,	− 16,	− 46,	− 76,	− 30,	
+ 1,	− 8,	− 23,	− 38,	− 15,	$+ 13 = \alpha_5$;	
	+ 2,	− 12,	− 70,	− 216,		
+ 1,	− 6,	− 35,	− 108,	$- 231 = \alpha_4$;		
	+ 2,	− 8,	− 86,			
+ 1,	− 4,	− 43,	$- 194 = \alpha_3$;			
	+ 2,	− 4,				
+ 1,	− 2,	$- 47 = \alpha_2$;				
	+ 2,					
+ 1,	$0 = \alpha_1$;					

die neue Gleichung lautet daher

$$\xi^5 - 47\xi^3 - 194\xi^2 - 231\xi + 13 = 0.$$

Wenn r eine mehrzifferige Zahl ist, so kann man die Verminderung mit einer Ziffer nach der andern ausführen, um jederzeit nur einen einzifferigen Factor zu haben. Um z. B. die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 9x + 7 = 0$$

um 3,27 zu vermindern, erniedrigt man sie erst um 3, dann um 0,2 und zuletzt um 0,07, wobei sich jede folgende Operation unmittelbar an die vorhergehende anschliefst, nämlich

1,	— 12,	+ 17,	— 9,	+ 7,	(3
	+ 3,	— 27,	— 30,	— 117,	
1,	— 9,	— 10,	— 39,	— 110,	(0,2
	+ 3,	— 18,	— 84,	— 26, 0784	
1,	— 6,	— 28,	— 123,	— 136, 0784	(0,07
	+ 3,	— 9,	— 7, 392	— 9, 82358559	
1,	— 3,	— 37,	— 130, 392	— 145, 90198559	
	+ 3,	+ 0, 04	— 7, 376		
1,	0,	— 36, 96	— 137, 768		
	+ 0,2	+ 0, 08	— 2, 568937		
1,	+ 0, 2	— 36, 88	— 140, 336937		
	+ 0, 2	+ 0, 12	— 2, 564331		
1,	+ 0, 4	— 36, 76	— 142, 901268		
	+ 0, 2	+ 0, 0609			
1,	+ 0, 6	— 36, 6991			
	+ 0, 2	+ 0, 0658			
1,	+ 0, 8	— 36, 6333			
	+ 0, 07	+ 0, 0707			
1,	+ 0, 87	— 36, 5626			
	+ 0, 07				
1,	+ 0, 94				
	+ 0, 07				
1,	+ 1, 01				
	+ 0, 07				
1,	+ 1, 08				

Die Verminderung um 3 giebt hiernach die Gleichung

$$\xi^4 - 37\,\xi^2 - 123\,\xi - 110 = 0;$$

die Verminderung um 3,2 giebt

$$\eta^4 + 0,8\,\eta^3 - 36,76\,\eta^2 - 137,768\,\eta - 136,0784 = 0;$$

endlich erhält man durch Verminderung um 3,27

$$\zeta^4 + 1,08\,\zeta^3 - 36,5626\,\zeta^2 - 142,901268\,\zeta - 145,90198559 = 0.$$

§. 19. Mittelst der in beiden vorigen Paragraphen gemachten Bemerkungen läfst sich die Newton'sche Näherungsmethode auf folgende Weise praktischer gestalten. Wir setzen voraus, dafs man einen ersten, auf eine Decimalstelle richtigen Näherungswerth für die gesuchte Wurzel der Gleichung

1) $$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

gefunden habe und bezeichnen denselben wie in §. 16 mit

$$x_1 = \varepsilon + \frac{\zeta_1}{10},$$

während der genaue Werth

$$x = \varepsilon + \frac{\zeta_1}{10} + \frac{\zeta_2}{10^2} + \frac{\zeta_3}{10^3} + \cdots$$

sein möge. Wird nun x um x_1 vermindert, indem man $x - x_1 = y$ setzt, so entsteht eine neue Gleichung

2) $$y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \ldots + b_{n-1} y + b_n = 0,$$

und darin ist vermöge der Werthe von x und x_1

$$y = \frac{\zeta_2}{10^2} + \frac{\zeta_3}{10^3} + \frac{\zeta_4}{10^4} + \cdots$$

mithin $y < \frac{1}{10}$. Zufolge dieses Umstandes sind y^2, y^3, ... y^n kleine Brüche, deren Weglassung keinen grofsen Fehler erzeugen kann; es ist daher näherungsweis nach No. 2)

$$b_{n-1} y + b_n = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{b_n}{b_{n-1}},$$

und dieser Ausdruck mufs nahezu mit $\frac{\zeta_2}{10^2}$ übereinstimmen, weil der dekadische Werth von y, auf seine erste Decimale beschränkt, in der That $= \frac{\zeta_2}{10^2}$ ist. Demnach bestimmt sich die nächste Decimale von x durch die Formel

$$\frac{\zeta_2}{10^2} = -\frac{b_n}{b_{n-1}},$$

und der zweite Näherungswerth von x ist

$$x_2 = \varepsilon + \frac{\zeta_1}{10} + \frac{\zeta_2}{10^2}.$$

Bevor man weiter geht, mufs man erst die Prüfung der neuen Decimale ζ_2 vornehmen, und zu diesem Zwecke substituirt man in No. 2) sowohl x_2 als den Werth

$$x'_2 = \varepsilon + \frac{\zeta_1}{10} + \frac{\zeta_2 + 1}{10^2},$$

wodurch $f(x)$ verschiedene Vorzeichen erhalten mufs. Diese Controle, welche nach §. 17 ausgeführt wird, bildet zugleich den Anfang zur Ermittelung der nächsten Decimale ζ_3. Man vermindert nämlich y um $\frac{\zeta_2}{10^2}$ und gelangt dadurch zu einer neuen Gleichung

3) $$z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_{n-1} z + c_n = 0,$$

deren Wurzel ist

$$z = y - \frac{\zeta_2}{10^2} = \frac{\zeta_3}{10^3} + \frac{\zeta_4}{10^4} + \ldots;$$

da z weniger als $\frac{1}{100}$ beträgt, so kann man die Gleichung 3) auf $c_{n-1} z + c_n = 0$ reduciren und erhält dadurch den ungefähren Werth von z. Dieser mufs nahezu $= \frac{\zeta_3}{10^3}$ sein, mithin bestimmt sich die dritte Decimale ζ_3 durch die Formel

$$\frac{\zeta_3}{10^3} = -\frac{c_n}{c_{n-1}},$$

und der entsprechende dritte Näherungswerth von x ist

$$x_3 = \varepsilon + \frac{\zeta_1}{10} + \frac{\zeta_2}{10^2} + \frac{\zeta_3}{10^3}.$$

Nachdem man die gefundene dritte Decimale controlirt hat, geht man auf demselben Wege weiter zur Bestimmung von ζ_4, ζ_5, etc.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$x^3 + 8x^2 + 6x - 75,9 = 0.$$

Eine reelle Wurzel derselben liegt zwischen 2 und 3; durch Versuche findet man leicht

$$x_1 = 2,4.$$

Vermindert man x um 2,4, so erhält man die neue Gleichung

$$y^3 + 15,2y^2 + 61,68y - 1,596 = 0,$$

diese giebt

$$-\frac{b_3}{b_2} = \frac{1,596}{61,68} = 0,02\ldots,$$

mithin als zweiten Näherungswerth

$$x_2 = 2,42,$$

der sich durch die Controle als richtig zeigt. Die Verminderung des y um 0,02 führt zu der weiteren Gleichung

$$z^3 + 15,26z^2 + 62,2892z - 0,356312 = 0,$$

woraus folgt

$$-\frac{c_3}{c_2} = \frac{0,356312}{62,2892} = 0,005\ldots,$$

$$x_3 = 2,425.$$

Nach geschehener Prüfung ist z um 0,005 zu vermindern; hierdurch entsteht die Gleichung

$$u^3 + 15,275u^2 + 62,441875u - 0,044484375 = 0,$$

welche giebt

$$-\frac{d_3}{d_2} = \frac{0,044484375}{62,441875} = 0,0007\ldots,$$

$$x_4 = 2,4257.$$

Das Detail dieser Rechnung giebt die folgende Zusammenstellung, worin x erst um 2, dann um 0,4 vermindert worden ist. Unter den stärkeren Strichen stehen jedesmal in diagonaler Richtung die Coefficienten einer durch Verminderung erhaltenen Gleichung.

1,	8,	6,	— 75,9	($r = 2$,
	2,	20,	52,	
1,	10,	26,	— 23,9	($r = 0,4$
	2,	24,	22,304	
1,	12,	50,	— 1,596	($r = 0,02$
	2,	5,76	1,239688	
1,	14,	55,76	— 0,356312	($r = 0,005$
	0,4	5,92	0,311827625	
1,	14,4	61,68	— 0,044484375	($r = 0,0007$
	0,4	0,3044		
1,	14,8	61,9844		
	0,4	0,3048		
1,	15,2	62,2892		
	0,02	0,076325		
1,	15,22	62,365525		
	0,02	0,076350		
1,	15,24	62,441875		
	0,02			
1,	15,26			
	0,005			
1,	15,265			
	0,005			
1,	15,270			
	0,005			
1,	15,275			

Handelt es sich um die Bestimmung negativer Wurzeln, so verwandelt man dieselben dadurch in positive Wurzeln, dafs man a_1, a_3, a_5, etc. mit entgegengesetzten Zeichen nimmt.

Besondere Aufmerksamkeit verlangt der Fall, wo zwei Wurzeln einander sehr nahe liegen. Besteht z. B. die eine Wurzel aus den Ziffern ε, ζ_1, ζ_2 etc., die andere aus ε, ϑ_1, ϑ_2 etc., so genügt der Gleichung 2) sowohl

$$y = \frac{\zeta_1}{10} + \frac{\zeta_2}{10^2} + \frac{\zeta_3}{10^3} + \cdots$$

als auch

$$y = \frac{\vartheta_1}{10} + \frac{\vartheta_2}{10^2} + \frac{\vartheta_3}{10^3} + \cdots,$$

mithin mufs ihre linke Seite sowohl für

$$y = \frac{\zeta_1}{10} \quad \text{und} \quad y = \frac{\zeta_1 + 1}{10}$$

als auch für

$$y = \frac{\vartheta_1}{10} \quad \text{und} \quad y = \frac{\vartheta_1 + 1}{10}$$

einen Zeichenwechsel erleiden. Das letzte Glied c_n der nächsten transformirten Gleichung enthält das Resultat einer solchen Substitution, man erkennt also die Trennungsstelle zweier naheliegenden Wurzeln daran, dafs einerseits der Gleichung 2) zwei Zahlen genügen und dafs andererseits das letzte Glied der nächsten transformirten Gleichung sein Zeichen wechselt, wenn ϑ_1 für ζ_1 gesetzt wird.

Die hiermit auseinandergesetzte Modification des Newton'schen Verfahrens ist unter dem Namen der Horner'schen Methode bekannt; sie empfiehlt sich vor allen übrigen Auflösungsarten durch Leichtigkeit und Sicherheit. Bei der praktischen Anwendung derselben können noch manche Rechnungsvortheile benutzt werden, deren Erörterung hier zu weit führen würde. Auch zur Berechnung der complexen Wurzeln läfst sich die nämliche Methode anwenden. Hinsichtlich dieser Einzelnheiten verweisen wir theils auf Horner's Abhandlung in den *Philosophical transactions* vom J. 1819, theils auf die Schriften: Spitzer, Allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen, Wien 1851, und Scheffler, die Auflösung der algebraischen und transcendenten Gleichungen, Braunschweig 1859.

§. 20. Eine andere Methode zur Auflösung von Gleichungen beruht auf der sogenannten *regula falsi* und läfst sich leicht geometrisch veranschaulichen. Denkt man sich nämlich x als Abscisse und $y = f(x)$ als Ordinate eines Punktes, so repräsentirt die genannte Gleichung eine gewisse Curve, welche die Abscissenachse schneidet oder berührt, so oft y den speciellen Werth Null bekommt. Die Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ ist daher nichts Anderes als die Aufsuchung derjenigen Punkte, in welchen ein Durchschnitt oder eine Berührung der Curve mit der Abscissenachse stattfindet. In einer Figur, die man leicht entwerfen wird, mögen

$$OM_1 = x_1 \quad \text{und} \quad M_1P_1 = y_1 = f(x_1),$$
$$OM_2 = x_2 \quad \text{und} \quad M_2P_2 = y_2 = f(x_2),$$

die Coordinaten zweier Curvenpunkte P_1 und P_2 sein, auch werde noch vorausgesetzt, dafs y_1 und y_2 entgegengesetzte Zeichen haben,

mithin P_1 und P_2 auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenachse liegen; die Curve mufs dann, wofern sie überhaupt continuirlich von P_1 bis P_2 verläuft, die x-Achse wenigstens einmal schneiden. Aber auch die Sehne $P_1 P_2$ schneidet die x-Achse in einem Punkte M_3, dessen Abscisse $OM_3 = x_3$ mittelst der Proportion

$$x_3 - x_1 : x_2 - x_1 = 0 - y_1 : y_2 - y_1$$

leicht zu bestimmen ist, nämlich

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - y_1}{y_2 - y_1} y_1.$$

Sind nun x_1 und x_2 wenig von einander verschieden, so liegen die Punkte P_1 und P_2 einander ziemlich nahe, und der Curvenbogen $P_1 P_2$ kann näherungsweis mit seiner gleichnamigen Sehne verwechselt werden; dann liegt aber M_3 dem gesuchten Durchschnitte von Curve und x-Achse jedenfalls näher als jeder der Punkte M_1 und M_2, d. h. wenn x_1 und x_2 ein paar Näherungswerthe für das gesuchte x sind, und wenn y_1 und y_2 entgegengesetzte Zeichen haben, so ist x_3 ein besserer Näherungswerth. Diese einfache Betrachtung läfst sich gleich wiederholen, um einen neuen Näherungswerth zu finden. Berechnet man nämlich die zu x_3 gehörende Ordinate $y_3 = f(x_3)$, so ist dieselbe von Null verschieden und bildet daher entweder mit y_1 oder mit y_2 einen Zeichenwechsel, wobei wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, beispielweis voraussetzen wollen, dafs y_2 und y_3 entgegengesetzte Zeichen haben mögen. Die Verbindungslinie $P_2 P_3$ schneidet die x-Achse in einem Punkte M_4, und die Abscisse desselben, nämlich

$$x_4 = x_2 - \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} y_2,$$

giebt nun einen neuen, wiederum besseren Näherungswerth für x, u. s. w.

Als Beispiel mag nach diesem Verfahren die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel der Gleichung

$$y = x^5 + 7x - 3 = 0$$

berechnet werden. Indem man zuerst die Werthe $x = 0,1$ und $x = 0,2$ etc. versucht, findet man

$$\text{für } x = 0,4; \quad y = -0,19;$$
$$\text{-} \quad x = 0,5; \quad y = +0,53;$$

daher ist ein genauerer Werth

$$x = 0,4 - \frac{0,5 - 0,4}{0,53 - (-0,19)}(-0,19) = 0,426.$$

Diesem entspricht $y = -0,004$, daher combinirt man

$$x = 0,426; \quad y = -0,004;$$
$$x = 0,5 \quad ; \quad y = +0,530;$$

diefs giebt

$$x = 0,426 + \frac{0,074}{0,534} \cdot 0,004 = 0,42655.$$

Der zugehörige Werth von y ist $y = -0,00003$, mithin $x = 0,42655$ schon ziemlich genau. Vergröfsert man die letzte Decimale um eine Einheit, so wird y positiv, mithin kann man von der neuen Combination ausgehen:

$$x = 0,42655; \quad y = -0,00002952;$$
$$x = 0,42656; \quad y = +0,00004214;$$

der neue Näherungswerth ist

$$x = 0,42655 + \frac{0,00001}{0,00007166} \cdot 0,00002952 = 0,4265541$$

und giebt auf sieben Decimalen genau $y = 0$.

§. 21. Im Principe wesentlich verschieden von den bisherigen Auflösungsmethoden ist folgende. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ die n Wurzeln der Gleichung

$$1) \qquad x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \ldots \pm A_{n-1} x \mp A_n = 0,$$

so gilt bekanntlich die Relation

$$x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \ldots \pm A_{n-1} x \mp A_n$$
$$= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\nu);$$

daraus folgt, wenn man $-x$ an die Stelle von x treten läfst,

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$
$$= (x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\ldots(x+\nu)$$

und durch Multiplication beider Gleichungen

$$x^{2n} - (A_1^2 - 2A_2)x^{2n-2} + (A_2^2 - 2A_1A_3 + 2A_4)x^{3n-4}$$
$$-(A_3^2 - 2A_2A_4 + 2A_1A_5 - 2A_6)x^{2n-6} + \ldots$$
$$= (x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)\ldots(x^2-\nu^2).$$

Zur Abkürzung sei

$$y = x^2,$$

$$2) \qquad \begin{cases} B_1 = A_1^2 - 2A_2, \\ B_2 = A_2^2 - 2A_1A_3 + 2A_4, \\ B_3 = A_3^2 - 2A_2A_4 + 2A_1A_5 - A_6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

die vorige Gleichung lautet dann

$$y^n - B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} - \ldots$$
$$= (y-\alpha^2)(y-\beta^2)(y-\gamma^2)\ldots(y-\nu^2)$$

In den speciellen Fällen $y = \alpha^2$, $y = \beta^2$, $y = \gamma^2$ etc. verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung; die n Wurzeln der Gleichung

3) $$y^n - B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} - B_3 y^{n-3} + \ldots = 0$$

sind also α^2, β^2, γ^2, ... ν^2, d. h. die Quadrate von den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung 1). Diese Transformation kann leicht wiederholt werden; setzt man nämlich $z = y^2$ und

$$C_1 = B_1^2 - 2B_2,$$
$$C_2 = B_2^2 - 2B_1 B_3 + 2B_4,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

so erhält man eine neue Gleichung

$$z^n - C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} - C_3 z^{n-3} + \ldots = 0,$$

deren Wurzeln die Quadrate von y, d. h. die Biquadrate von x sind. Indem man auf diese Weise fortgeht und das erwähnte Verfahren p-mal anwendet, gelangt man zu einer Gleichung

4) $$u^n - P_1 u^{n-1} + P_2 u^{n-2} - P_3 u^{n-3} + \ldots = 0,$$

deren Wurzeln die 2^pten Potenzen von den Wurzeln der Gleichung 1) ausmachen; setzt man zur Abkürzung $2^p = q$, so genügen hiernach der Gleichung 4) die Werthe

$$u = \alpha^q, \quad u = \beta^q, \quad u = \gamma^q, \quad \ldots \; u = \nu^q,$$

und es ist dabei nach §. 5

$$P_1 = \alpha^q + \beta^q + \gamma^q + \delta^q + \ldots.,$$
$$\begin{aligned} P_2 = \alpha^q\beta^q &+ \alpha^q\gamma^q + \alpha^q\delta^q + \ldots. \\ &+ \beta^q\gamma^q + \beta^q\delta^q + \ldots. \\ &\qquad\quad + \gamma^q\delta^q + \ldots. \\ &\qquad\qquad\quad + \ldots., \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} P_3 = \alpha^q\beta^q\gamma^q &+ \alpha^q\beta^q\delta^q + \ldots\ldots \\ &+ \alpha^q\gamma^q\delta^q + \ldots\ldots \\ &\qquad\quad + \ldots\ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

Unter der Voraussetzung, dafs α, β, γ, etc. reell und nach der Gröfse ihrer absoluten Werthe geordnet sind, etwa

$$\alpha^2 > \beta^2 > \gamma^2 > \ldots,$$

hat man

$$\alpha^q > \beta^q > \gamma^q > \ldots.$$

und hier kann man q immer so grofs wählen, dafs α^q die übrigen Potenzen β^q, γ^q etc. bedeutend überwiegt. Dann ist nahezu $\alpha^q + \beta^q + \gamma^q + \ldots.$ einerlei mit α^q, also

$$P_1 = \alpha^q,$$

und aus gleichem Grunde

$$P_2 = \alpha^q\beta^q, \quad P_3 = \alpha^q\beta^q\gamma^q, \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Gleichungen liefern der Reihe nach alle reellen Wurzeln, nämlich

$$\alpha = \sqrt[q]{P_1}, \quad \beta = \frac{\sqrt[q]{P_2}}{\alpha}, \quad \gamma = \frac{\sqrt[q]{P_3}}{\alpha\beta}, \quad \ldots.$$

oder bei logarithmischer Rechnung

$$5)\quad \begin{cases} \log\alpha = \dfrac{\log P_1}{q}, \\ \log\beta = \dfrac{\log P_2}{q} - \dfrac{\log P_1}{q}, \\ \log\gamma = \dfrac{\log P_3}{q} - \dfrac{\log P_2}{q}, \end{cases}$$

u. s. w.

Begreiflicherweise sind P_1, P_2, P_3 etc. sehr grofse Zahlen; man berechnet daher nur die Logarithmen der Coefficienten

$$\begin{array}{l} B_1,\ B_2,\ B_3,\ \ldots \\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots \end{array}$$

und benutzt hierzu die Tafeln der Additions- und Subtractionslogarithmen.

Auf die Gleichung

$$x^4 - 15x^2 + 20x - 2 = 0$$

angewendet, giebt dieses Verfahren zuerst

$$y^4 - 30y^3 + 221y^2 - 340y + 4 = 0$$

und als zweite Transformation

$$z^4 - 458z^3 + 22449z^2 - 113832z + 16 = 0.$$

Von hier an steigen die Coefficienten so rasch, dafs wir nur deren Logarithmen benutzen und zur Abkürzung statt *num log* ζ das einfache Zeichen $\overline{\zeta}|$ schreiben; als dritte, vierte und fünfte der transformirten Gleichung finden sich

$$s^4 - \overline{5,1843065}|\,s^3 + \overline{8,8482340}|\,s^2 - \overline{10,1124984}|\,s + \overline{2,4082400}| = 0,$$

$$t^4 - \overline{10,3415830}|\,t^3 + \overline{17,6929930}|\,t^2 - \overline{20,2249968}|\,t + \overline{4,8164800}| = 0,$$

$$u^4 - \overline{20,6822760}|\,u^3 + \overline{35,3859760}|\,u^2 - \overline{40,4499936}|\,u + \overline{9,6329600}| = 0,$$

und zwar sind die Wurzeln der letzten Gleichung

$$u = \alpha^{32},\quad u = \beta^{32},\quad u = \gamma^{32},\quad u = \delta^{32}.$$

Ob man noch weiter gehen soll oder nicht, entscheidet sich durch folgende Bemerkung. Der Coefficient von t^3 ist:

$$\overline{10,3415830}| = \alpha^{16} + \beta^{16} + \gamma^{16} + \delta^{16},$$

und der Coefficient von u^3:

$$\overline{20,6822760}| = \alpha^{32} + \beta^{32} + \gamma^{32} + \delta^{32};$$

der letztere kommt beinahe dem Quadrate des ersten gleich, mithin überwiegen bereits die Potenzen von α so sehr, daſs angenähert

$$10,34\ldots = \log(\alpha^{16}) \quad \text{und} \quad 20,68\ldots = \log(\alpha^{32}) = 2\log(\alpha^{16})$$

ist, als wenn die Potenzen von β, γ, δ gar nicht vorhanden wären. Diese Bemerkung gilt auch allgemein, d. h. man wird mit dem successiven Quadriren innehalten, sobald die Coefficienten der transformirten Gleichungen quadratisch wachsen oder, was dasselbe ist, wenn ihre Logarithmen sich verdoppeln. Die Coefficienten der letzten Gleichung geben nun nach den Formeln 5)

$$\log\alpha = \frac{20,6822760}{32} = 0,6463211,$$

$$\log\beta = \frac{35,3859760}{32} - 0,6463211 = 0,4594910,$$

$$\log\gamma = \frac{40,4499936}{32} - 1,1058121 = 0,1582502,$$

$$\log\delta = \frac{0,6329600}{32} - 1,2640623, = 0,0369677 - 1,$$

mithin sind die gesuchten Wurzeln

$$\alpha = \pm 4,429157;$$
$$\beta = \pm 2,880653;$$
$$\gamma = \pm 1,439628;$$
$$\delta = \pm 0,108885;$$

Um die Vorzeichen zu bestimmen, substituirt man entweder die gefundenen Werthe in die ursprüngliche Gleichung oder man benutzt die Cartesianische Zeichenregel (§. 8). Vermöge der letzteren sind im obigen Falle drei positive Wurzeln vorhanden, und die Summe aller vier Wurzeln muſs $= A_1 = 0$ sein; diesen Bedingungen zusammen genügen nur ein negatives α und positive β, γ, δ.

Diese Methode ist theoretisch sehr elegant, für die praktische Benutzung aber zu weitläufig namentlich dann, wenn die gröſste Wurzel nur wenig von der nächst kleineren differirt. Auch complexe Wurzeln lassen sich nach demselben Verfahren berechnen, doch wird dann die Arbeit noch mühsamer. Das Nähere hierüber giebt die Schrift des Erfinders: „Gräffe, die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen, Zürich 1837“, womit man einen Aufsatz von Encke in Crelle's Journal der Mathematik Bd. 22, S. 193 vergleichen möge.

§. 22. Wir wollen zum Schlusse noch ein Auflösungsverfahren mittheilen, welches sich auf die Bemerkung gründet, daſs der ganzzahlige Bestandtheil einer irrationalen Wurzel durch Versuche leicht zu ermitteln ist und daſs der gebrochene Bestandtheil auch unter der

Form eines unendlichen Kettenbruches dargestellt werden kann. Die gegebene Gleichung sei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

und es bestehe eine ihrer Wurzeln aus der ganzen Zahl α und einem echten Bruche. Setzt man

1) $$x = \alpha + \frac{1}{y}$$

in die obige Gleichung ein, so gelangt man zu einer neuen Gleichung von der Form

$$y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \ldots + b_{n-1} y + b_n = 0$$

und wegen $\frac{1}{y} < 1$ ist $y > 1$. Man ermittele nun zunächst die gröfste in y enthaltene ganze Zahl β und bezeichne den echt gebrochenen Rest mit $\frac{1}{z}$; die Substitution

2) $$y = \beta + \frac{1}{z}$$

liefert dann eine Gleichung von der Form

$$z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_{n-1} z + c_n = 0.$$

Hier beträgt z mehr als die Einheit und daher kann

3) $$z = \gamma + \frac{1}{u}$$

gesetzt werden, wo γ wiederum durch Versuche zu bestimmen ist, und u die Einheit überschreitet. Man übersieht unmittelbar, wie sich dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen läfst und dafs aus den Gleichungen 1), 2), 3) etc. die Formel

4) $$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \ldots}}}$$

hervorgeht. Die Näherungsbrüche dieses unendlichen Kettenbruches sind abwechselnd gröfser und kleiner als dessen Gesammtwerth x und liefern daher Grenzen, die beliebig eng zusammengezogen werden können. Sollte die gesuchte Wurzel negativ sein, so verwandelt man sie gleich anfangs dadurch in eine positive, dafs man a_1, a_3, a_5, etc. mit entgegengesetzten Zeichen nimmt.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$x^3 + 3x - 5 = 0,$$

welcher ein zwischen 1 und 2 liegendes x genügt. Vermindert man erst x um 1 nach dem im §. 18 angegebenen Verfahren, so erhält man

$$\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi - 1 = 0,$$

mithin, wenn $\xi = \frac{1}{y}$ gesetzt wird,

$$x = 1 + \frac{1}{y}, \quad y^3 - 6y^2 - 3y - 1 = 0.$$

Eine Wurzel der neuen Gleichung liegt zwischen 6 und 7; man vermindert daher erst y um 6, wodurch

$$\eta^3 + 12\eta^2 + 33\eta - 19 = 0$$

entsteht, und substituirt dann $\eta = \frac{1}{z}$; diefs giebt

$$y = 6 + \frac{1}{z}, \quad 19z^3 - 33z^2 - 12z - 1 = 0.$$

Zwischen 2 und 3 liegt ein Werth des z; daher ist die weitere Rechnung

$$z = 2 + \frac{1}{t}, \quad 5t^3 - 84t^2 - 81t - 19 = 0,$$

$$t = 17 + \frac{1}{u} \qquad \text{u. s. f.}$$

mithin

$$x = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{17 + \dots}}}$$

oder $x = 1,154\dots$

In den meisten Fällen ist dieses von Lagrange (*sur la résolution des équations numériques*) herrührende Verfahren zu weitläufig für den Gebrauch und es hat daher nur noch ein historisches Interesse; zur praktischen Berechnung der Wurzeln empfiehlt sich immer die Horner'sche Methode als die kürzeste und sicherste.

IV. Die irrationalen Gleichungen.

§. 23. Eine algebraische Gleichung heifst irrational, wenn sie irrationale Functionen der unbekannten Gröfse enthält, wie z. B.

$$\sqrt{Ax + a} + \sqrt[3]{Bx + b} + c = 0.$$

Um eine solche Gleichung auf die rationale Form

$$x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \alpha_2 x^{m-2} + \dots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m = 0$$

zurückzubringen, kann man ein Radical nach dem anderen durch successive Potenzirungen wegschaffen. Zu diesem Zwecke giebt man z. B. der obigen Gleichung erst die Form

$$\sqrt{Ax + a} + c = -\sqrt[3]{Bx + b}$$

und erhebt beiderseits auf die dritte Potenz; das Resultat läfst sich folgendermaafsen anordnen

$$(Ax + a + 3c^2)\sqrt{Ax + a}$$
$$= -[(3Ac + B)x + 3ac + b + c^3]$$

und wenn man beiderseits quadrirt, so gelangt man zu einer cubischen Gleichung für die Unbekannte x. Dieses Verfahren ist noch einer wesentlichen Modification fähig, die wir erst an einem Beispiele auseinander setzen wollen.

Die gegebene Gleichung sei

$$x + 6\sqrt{x} = 91;$$

nach dem Vorigen ist die Form

$$x - 91 = -6\sqrt{x}$$

herbeizuführen und dann zu quadriren, wodurch die quadratische Gleichung

$$(x - 91)^2 = 6x \quad \text{oder} \quad x^2 - 218x = -8281$$

entsteht, deren Wurzeln sind

$$x = 49 \quad \text{und} \quad x = 169.$$

Der erste Werth genügt in der That der gegebenen Gleichung, vom zweiten Werthe gilt diefs aber nicht, vielmehr enthält er die Auflösung der Gleichung

$$x - 6\sqrt{x} = 91.$$

Dafs hier eine fremde Wurzel hinzugekommen ist, hat seinen Grund in der Operation des Quadrirens; bei dieser geht nämlich das Vorzeichen von $\sqrt{x}$ verloren, und daher führen die beiden verschiedenen irrationalen Gleichungen

$$x - 91 = -6\sqrt{x} \quad \text{und} \quad x - 91 = +6\sqrt{x}$$

zu einer und derselben rationalen quadratischen Gleichung. Achtet man gleich anfangs auf die Doppeldeutigkeit jeder Quadratwurzel, so kann man die rationale Gleichung auch kürzer finden, indem man sagt: so lange das Vorzeichen von $\sqrt{x}$ nicht bestimmt ist, liegen in der Aufgabe $x + 6\sqrt{x} = 91$ eigentlich zwei verschiedene Gleichungen, nämlich

$$x - 91 + 6\sqrt{x} = 0 \quad \text{und} \quad x - 91 - 6\sqrt{x} = 0;$$

beide sind gleichzeitig lösbar, wenn man ihr Product zum Verschwinden bringt, also

$$(x - 91 + 6\sqrt{x})(x - 91 - 6\sqrt{x}) = 0$$

setzt, und damit gelangt man zu derselben quadratischen Gleichung wie vorhin.

Dieses zweite Verfahren gewährt namentlich dann einen Vortheil,

wenn mehrere Wurzeln vorkommen. So sind z. B. in der Gleichung

$$\sqrt{Ax+a}+\sqrt{Bx+b}+\sqrt{Cx+c}=0$$

vier verschiedene Aufgaben enthalten, welche hervortreten, sobald man die Radicale im absoluten Sinne nimmt und ihnen alle möglichen verschiedenen Vorzeichen giebt, nämlich

$$+\sqrt{Ax+a}+\sqrt{Bx+b}+\sqrt{Cx+c}=0,$$
$$-\sqrt{Ax+a}+\sqrt{Bx+b}+\sqrt{Cx+c}=0,$$
$$+\sqrt{Ax+a}-\sqrt{Bx+b}+\sqrt{Cx+c}=0,$$
$$+\sqrt{Ax+a}+\sqrt{Bx+b}-\sqrt{Cx+c}=0.$$

Das Product dieser vier Gleichungen ist rational und zwar

$$-(Ax+a)^2-(Bx+b)^2-(Cx+c)^2$$
$$+2(Ax+a)(Bx+b)+2(Bx+b)(Cx+c)+2(Cx+c)(Ax+a)$$
$$=0$$

oder bei Anordnung nach Potenzen von x

$$(A^2+B^2+C^2-2AB-2BC-2CA)x^2$$
$$+2(Aa+Bb+Cc-Ab-Ba-Bc-Cb-Ca-Ac)x$$
$$+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$$
$$=0.$$

Als Zahlenbeispiel diene die irrationale Gleichung

$$\pm\sqrt{2x+7}\pm\sqrt{6x+19}\pm\sqrt{23x+41}=0;$$

ihr entspricht die quadratische Gleichung

$$177x^2+130x-307=0$$

mit den Wurzeln

$$x=+1 \quad \text{und} \quad x=-\frac{307}{177}.$$

Die beiden existirenden Auflösungen sind hiernach

$$+3+5-8=0,$$
$$+\frac{25}{\sqrt{177}}-\frac{39}{\sqrt{177}}+\frac{14}{\sqrt{177}}=0.$$

§. 24. Um das so eben benutzte Verfahren auf den Fall auszudehnen, wo Radicale höherer Grade vorkommen, mufs man sich erinnern, dafs ein Ausdruck von der Form $\sqrt[n]{z}$ vieldeutig ist und die n Werthe von $\varrho_1\zeta$, $\varrho_2\zeta$, $\varrho_3\zeta$, ... $\varrho_n\zeta$ besitzt, worin ϱ_1, ϱ_2, ... ϱ_n die n Werthe von $\sqrt[n]{1}$ bedeuten und ζ der absolute Werth von $\sqrt[n]{z}$ ist. Um hiernach die Gleichung

1) $$\sqrt{Ax+a}+\sqrt[3]{Bx+b}+c=0$$

rational zu machen, bezeichne man für den Augenblick den absoluten Werth von $\sqrt{Ax+a}$ mit u und den absoluten Werth von

$\sqrt[3]{Bx+b}$ mit v; die drei Werthe von $\sqrt[3]{Bx+b}$ sind dann $\varrho_1 v$, $\varrho_2 v$, $\varrho_3 v$, wo

$$\varrho = \sqrt[3]{1} \quad \text{oder} \quad \varrho^3 - 1 = 0$$

ist. In der Aufgabe 1) liegen nun folgende sechs specielle Gleichungen

$$2)\qquad \begin{cases} +u + \varrho_1 v + c = 0, \\ +u + \varrho_2 v + c = 0, \\ +u + \varrho_3 v + c = 0, \\ -u + \varrho_1 v + c = 0, \\ -u + \varrho_2 v + c = 0, \\ -u + \varrho_3 v + c = 0. \end{cases}$$

Das Product der drei ersten Gleichungen ist

$$(c+u)^3 + (c+u)^2 (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) v$$
$$+ (c+u)(\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3) v^2 + \varrho_1\varrho_2\varrho_3\, v^3 = 0;$$

da ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Wurzeln der Gleichung $\varrho_3 - 1 = 0$ darstellen, so hat man

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 0, \quad \varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3 = 0, \quad \varrho_1\varrho_2\varrho_3 = 1,$$

mithin einfacher

$$(c+u)^3 + v^3 = 0$$

oder

$$(c^3 + 3cu^2 + v^3) + u(3c^2 + u^2) = 0.$$

Als Product der letzten drei Gleichungen in No. 2) findet man auf dieselbe Weise

$$(c^3 + 3cu^2 + v^3) - u(3c^2 + u^2) = 0,$$

mithin ist das Product aller sechs Gleichungen

$$(c^3 + 3cu^2 + v^3)^2 - u^2(3c^2 + u^2)^2 = 0.$$

Hierin kommen nur $u^2 = Ax + a$ und $v^3 = Bx + b$ vor, und daher ist die gesuchte rationale Gleichung

$$3)\qquad [c^3 + 3ac + b + (3Ac + B)x]^2$$
$$- (Ax + a)(3c^2 + a + Ax)^2 = 0,$$

oder

$$4)\qquad A^3x^3 + [3A^2(a - c^2) - B(6Ac + B)]\,x^2$$
$$+ [3A(a - c^2)^2 - 6Abc - 2B(3ac + b + c^3)]\,x$$
$$+ [(a - c^2)^3 - b(6ac + b + 2c^3) \qquad = 0.$$

Zur Auflösung des Zahlenbeispieles

$$\sqrt{x+4} + \sqrt[3]{x+3} + 1 = 0$$

ist hiernach

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0;$$

daraus folgen die Werthe

$$x = +5, \quad x = -3, \quad x = -4,$$

welchen die Auflösungen entsprechen

$$-\sqrt{9}+\sqrt[3]{8}+1=0,\quad -\sqrt{1}+\sqrt[3]{0}+1=0,$$
$$\sqrt{0}+\sqrt[3]{-1}+1=0.$$

Diese Beispiele zeigen hinreichend, wie irrationale Gleichungen rational zu machen sind. Ein anderes Verfahren, welches die Kenntnifs der n verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{1}$ nicht erfordert, werden wir in §. 30 erörtern.

V. Die transcendenten Gleichungen.

§. 25. Unter dem Collectivnamen der transcendenten Gleichungen fafst man meistens alle diejenigen Gleichungen zusammen, welche weder zu den rationalen noch zu den irrationalen gehören. Durch passende Umformungen oder Substitutionen lassen sich manche transcendente Gleichungen auf eine algebraische Form zurückführen, und man mufs daher reductibele und irreductibele transcendente Gleichungen unterscheiden, falls man es nicht vorzieht, nur die irreductibelen Gleichungen als die eigentlich transcendenten anzusehen. Wir beschäftigen uns zunächst mit den hauptsächlichsten Formen der reductibelen Gleichungen.

Bezeichnen $A, B, C, \ldots$ Constanten, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, ... algebraische Functionen von x, so hat die Gleichung

$$A^{\varphi(x)}\,B^{\psi(x)}\,C^{\chi(x)}\ldots = K$$

zwar eine transcendente Form, wird aber zu einer algebraischen, wenn man die Logarithmen nimmt, nämlich

$$a\,\varphi(x)+b\,\psi(x)+c\,\chi(x)+\ldots = k,$$

wo zur Abkürzung $\log A = a$, $\log B = b$ u. s. w. gesetzt worden ist. So führt z. B. die Gleichung

$$2^x\,.\,7^{\sqrt{5x-11}} = 392$$

zu der irrationalen algebraischen Gleichung

$$\log 2\,.\,x+\log 7\,.\,\sqrt{5x-11} = \log 392;$$

macht man dieselbe rational, so erhält man die quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{2\log 2\,.\,\log 392+5\,.\,(\log 7)^2}{(\log 2)^2}\,x = -\frac{(\log 392)^2+11\,.\,(\log 7)^2}{(\log 2)^2}$$

oder

$$x^2 - 56{,}6356\ldots x = -160{,}9068\ldots,$$

deren Wurzeln

$$x=3 \quad\text{und}\quad x=53{,}6356\ldots$$

den beiden Aufgaben

$$2^x \cdot 7^{\sqrt{5x-11}} = 392 \quad \text{und} \quad 2^x \cdot 7^{-\sqrt{5x-11}} = 392$$

entsprechen, wenn $\sqrt{5x - 11}$ im absoluten Sinne genommen wird.

Zu den reductibelen Exponentialgleichungen gehört noch die folgende

$$A + Ba^{\beta x} + Ca^{\gamma x} + \ldots . = 0,$$

denn sie geht durch Substitution von $a^x = y$ über in

$$A + By^{\beta} + Cy^{\gamma} + \ldots = 0,$$

woraus man y und nachher $x = {}^a log\, y$ findet.

Gleichungen, in denen nur goniometrische Functionen eines unbekannten Winkels vorkommen, lassen sich dadurch reduciren, dafs man eine dieser Functionen als Unbekannte ansieht und die übrigen Functionen durch jene ausdrückt. So giebt z. B. die Gleichung

$$a \cos u + b \sin u = c,$$

wenn $\cos u = x$ gesetzt wird,

$$ax + b\sqrt{1 - x^2} = 0.$$

Meistentheils thut bei solchen Gleichungen die Einführung eines Hülfswinkels noch bessere Dienste. In dem vorliegenden Falle z. B. lassen sich a und b auf folgende Weise darstellen

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta,$$

so dafs

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \theta = \frac{b}{a}$$

ist; die vorige Gleichung geht dann über in

$$r \cos \theta \cos u + r \sin \theta \sin u = c$$

oder

$$\cos (u - \theta) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Hieraus erhält man die Werthe von $u - \theta$, mithin auch die von u, wenn man die Werthe von $u - \theta$ um $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ vergröfsert.

§. 26. Zur Auflösung von irreductibelen Gleichungen bedient man sich gewöhnlich des in §. 20 auseinandergesetzten Verfahrens, dessen Princip bei jeder Gleichung $f(x) = 0$ anwendbar bleibt, wofern $f(x)$ von $x = x_1$ bis $x = x_2$ continuirlich verläuft, und die Werthe $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Wenn die Näherungswerthe x_1 und x_2 diese zwei Bedingungen erfüllen, so ist dann

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_1$$

in der Regel ein genauerer Werth von x.

Als erstes Beispiel möge die Gleichung

$$\log x = \frac{x}{10} \quad \text{oder} \quad y = \log x - \frac{x}{10} = 0$$

dienen. Mit Hülfe der logarithmischen Tafeln findet man zunächst ohne Rechnung, dafs x zwischen 1,3 und 1,4 liegt, und zwar ist

$$\text{für } x = 1,3, \quad y = -0,016,$$
$$\text{- } x = 1,4, \quad y = +0,006,$$

mithin genauer

$$x = 1,3 + \frac{0,1}{0,022} \,.\, 0,016 = 1,37.$$

Ferner entsprechen einander die Werthe

$$x = 1,37 \quad \text{und} \quad y = -0,00028,$$
$$x = 1,38 \quad \text{-} \quad y = +0,00188,$$

daher ist der nächste Näherungswerth

$$x = 1,37 + \frac{0,01 \,.\, 0,00028}{0,00216} = 1,3713.$$

Durch mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens erhält man

$$x = 1,13712884 \ldots, \quad \log x = 0,13712884 \ldots$$

Als zweites Beispiel nehmen wir die Gleichung

$$x = \cos x \quad \text{oder} \quad y = x - \cos x = 0,$$

worin x einen Bogen des ersten Quadranten bedeuten möge. Durch Vergleichung der Tafel für die Längen der einzelnen Kreisbögen und der natürlichen goniometrischen Tafeln findet man sofort, dafs x ungefähr der Bogen von 42^0 ist; man hat nämlich

$$\text{für } x = arc\, 42^0, \quad y = 0,733 - 0,743 = -0,010,$$
$$\text{- } x = arc\, 43^0, \quad y = 0,750 - 0,731 = +0,019,$$

mithin genauer

$$x = arc\, 42^0 + \frac{0,017}{0,029} \,.\, 0,01 = arc\, 42^0 + 0,0058 \,..$$

oder

$$x = arc\, 42^0\, 20'.$$

Ferner ist

$$\text{für } x = arc\, 42^0\, 20', \quad y = -0,00038,$$
$$\text{- } x = arc\, 42^0\, 21', \quad y = +0,00010,$$

und hieraus ergiebt sich als folgender Näherungswerth

$$x = arc\, 42^0\, 20' + \frac{0,00029}{0,00049} \,.\, 0,00038$$
$$= arc\, 42^0\, 20' + 0,00023 = arc\, 42^0\, 20'\, 47''.$$

Combinirt man ihn mit der Annahme $x = 42^0\, 20'\, 48''$, so findet man, dafs derselbe noch um $0'',23$ zu vergröfsern ist.

VI. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 27. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem allgemeinen Probleme, n Gleichungen ersten Grades zwischen n Unbekannten aufzulösen; die Lösung desselben beruht auf einigen Hülfssätzen, die wir vorausschicken müssen.

Es seien n von einander verschiedene Gröſsen

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots g,\ h$$

gegeben und aus ihnen die Differenzen zwischen jeder Gröſse und allen ihren Vorgängern gebildet, nämlich

$$\begin{array}{c} b-a, \\ c-a,\quad c-b, \\ d-a,\quad d-b,\quad d-c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h-a,\quad h-b,\quad h-c,\ \ldots\ldots h-g; \end{array}$$

das Product derselben

$$P_n = (b-a)(c-a)(c-b)\ldots.(h-a)(h-b)\ldots(h-g)$$

besitzt dann die Eigenschaft, daſs es jedesmal gleich Null wird, sobald man für eine der Gröſsen eine der übrigen setzt. So wird z. B. $P_n = 0$, wenn man statt a überall b schreibt oder wenn c durch g ersetzt wird. Der Grund dieses Verschwindens liegt einfach darin, daſs P alle möglichen Differenzen zwischen $a, b, \ldots h$ als Factoren enthält und daſs folglich bei jeder von den erwähnten Substitutionen ein Factor $= 0$ wird. Denkt man sich das Product entwickelt, z. B. bei drei Gröſsen

$$\begin{aligned} P_3 &= (b-a)(c-a)(c-b) \\ &= bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a + ab^2 - a^2b, \end{aligned}$$

so bleibt die genannte Eigenschaft des P ungestört, und das Verschwinden des Productes geschieht dann auf die Weise, daſs sich zu jedem Summanden ein anderer findet, welcher ihm gleich und entgegengesetzt ist, wie man an dem obigen Beispiele prüfen kann. Aus dem entwickelten Producte bilden wir einen neuen Ausdruck, indem wir jeden Potenzexponenten in einen gleichgroſsen Index verwandeln, wodurch z. B. $a^3b^2c^7$ in $a_3b_2c_7$ oder $b^3c^5 = a^0b^3c^5$ in $a_0b_3c_5$ übergeht; diesen neuen Ausdruck nennen wir Q_n. Hiernach ist z. B.

$$Q_3 = a_0b_1c_2 - a_0b_2c_1 + b_0c_1a_2 - b_0c_2a_1 + c_0a_1b_2 - c_0a_2b_1$$

und zwar bildet Q_3 eine gewisse Function der neun Buchstaben a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2. In gleicher Weise ist Q_n eine gewisse Function der n^2 Gröſsen

$$\begin{matrix} a_0, & b_0, & c_0, & \dots g_0, & h_0, \\ a_1, & b_1, & c_1, & \dots g_1, & h_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \dots g_2, & h_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & c_{n-1}, & \dots g_{n-1}, & h_{n-1}, \end{matrix}$$

und heifst die Determinante derselben. Man bezeichnet sie entweder kurz mittelst eines Summenzeichens, indem man

$$Q_n = \Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \dots g_{n-2} h_{n-1})$$

schreibt, oder ausführlicher durch

$$Q_n = \begin{vmatrix} a_0, & b_0, & \dots h_0 \\ a_1, & b_1, & \dots h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & \dots h_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante Q_n besteht aus $n(n-1)$ theils positiven theils negativen Gliedern, deren jedes von der Form $a_p b_q \dots h_s$ ist; die Indices $p, q, \dots s$ werden durch alle möglichen Vertauschungen der Zahlen $0, 1, 2, \dots (n-1)$ gebildet, und dabei erhält der betreffende Summand das positive oder negative Vorzeichen, jenachdem die Anzahl der Vertauschungen gerade oder ungerade ist. Dieser Bemerkung folgend, kann man jede Determinante auch direct entwickeln, z. B.

$$\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 d_3) = \begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0, & d_0 \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = & a_0 b_1 c_2 d_3 - a_0 b_1 c_3 d_2 + a_0 b_2 c_3 d_1 - a_0 b_2 c_1 d_3 \\ & + a_0 b_3 c_1 d_2 + a_0 b_3 c_2 d_1 \\ & - a_1 b_0 c_2 d_3 + a_1 b_0 c_3 d_2 - a_1 b_2 c_3 d_0 + a_1 b_2 c_0 d_3 \\ & - a_1 b_3 c_0 d_2 + a_1 b_3 c_2 d_0 \\ & + a_2 b_0 c_1 d_3 - a_2 b_0 c_3 d_1 + a_2 b_1 c_3 d_0 - a_2 b_1 c_0 d_3 \\ & + a_2 b_3 c_0 d_1 - a_2 b_3 c_1 d_0 \\ & - a_3 b_0 c_1 d_2 + a_3 b_0 c_2 d_1 - a_3 b_1 c_2 d_0 + a_3 b_1 c_0 d_2 \\ & - a_3 b_2 c_0 d_1 + a_3 b_2 c_1 d_0. \end{aligned}$$

Für das Folgende ist besonders der Satz wichtig, dafs die Determinante jedesmal verschwindet, wenn statt eines der Buchstaben $a, b, c, \dots h$ einer der übrigen gesetzt wird. Bei dem entwickelten Producte P_n fand diese Eigenschaft statt, weil dann jeder Summand durch einen gleichen und entgegengesetzten aufgehoben wurde; die Verwandlung der Exponenten in Indices stört diese Gleichheit und die Vorzeichen nicht, mithin gilt für Q_n dasselbe wie für P_n. Dieser Satz läfst sich auch in Gleichungen darstellen, wenn man

die Determinante entweder nach den a oder nach den b u. s. w. anordnet. Bezeichnen wir z. B. mit $A_0 a_0$ die Summe aller Glieder, welche den gemeinschaftlichen Factor a_0 besitzen, mit $A_1 a_1$ die Summe aller den Factor a_1 enthaltenden Glieder u. s. f., so stellt sich Q_n unter die Form

$$Q_n = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \cdots + A_{n-1} a_{n-1},$$

und zufolge der vorigen Bemerkung gelten zusammen die Gleichungen

$$0 = A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + \cdots + A_{n-1} b_{n-1},$$
$$0 = A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + \cdots + A_{n-1} c_{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots + A_{n-1} h_{n-1}.$$

Mit Hülfe dieser Relationen gelangt man zu einer directen Auflösung des folgenden Systemes von n linearen Gleichungen zwischen den n Unbekannten $x, y, z, \ldots w$:

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + h_0 w = k_0,$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 w = k_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + h_2 w = k_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + h_{n-1} w = k_{n-1}.$$

Man multiplicire nämlich die erste Gleichung mit A_0, die zweite mit A_1, die dritte mit A_2 u. s. w.; die Summe aller Producte ist dann

$$(A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1})\, x$$
$$+ (A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + \ldots + A_{n-1} b_{n-1})\, y$$
$$+ (A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + \ldots + A_{n-1} c_{n-1})\, z$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_{n-1} h_{n-1})\, w$$
$$= A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}.$$

Der Coefficient von x ist die Determinante Q_n; die Coefficienten von $y, z, \ldots w$ sind zufolge der obigen Relationen sämmtlich $= 0$, mithin enthält die Gleichung nur die eine Unbekannte x. Auf der rechten Seite steht gleichfalls eine Determinante, welche sich von der Determinante Q_n dadurch unterscheidet, dafs k an der Stelle von a steht, mithin ist

$$x = \frac{\Sigma(\pm k_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1})}.$$

Zur Bestimmung von y dient ein ganz analoges Verfahren. Man ordnet nämlich Q_n nach $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$,

$$Q_n = B_0 b_0 + B_1 b_1 + B_2 b_2 + \cdots + B_{n-1} b_{n-1}$$

und bemerkt, dafs dieser Ausdruck verschwindet, wenn b durch einen der Buchstaben $a, c, d, \ldots h$ ersetzt wird; man multiplicirt dann

die aufzulösenden Gleichungen mit B_0, B_1, ... B_{n-1} und addirt, wobei die Coefficienten von x, z, ... w zu Null werden; man erhält

$$y = \frac{\Sigma(\pm a_0 k_1 c_2 \dots h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \dots h_{n-1})}.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$z = \frac{\Sigma(\pm a_0 b_1 k_2 \dots h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \dots h_{n-1})}$$

u. s. w. bis zuletzt

$$w = \frac{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \dots g_{n-2} k_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \dots g_{n-2} h_{n-1})}.$$

Diese sehr elegante, im Princip schon von Leibnitz angegebene Auflösung ist nichts Anderes als eine Verallgemeinerung des bekannten Subtractionsverfahrens; so sind z. B. A_0, A_1, ... A_{n-1} die Factoren, womit die einzelnen Gleichungen multiplicirt werden müssen, damit nach der Addition alle Unbekannten aufser x wegfallen. Zugleich ersieht man, dafs die Werthe von x, y, ... w einen gemeinschaftlichen Nenner besitzen, wie bei Gleichungen mit zwei oder drei Unbekannten schon aus der Algebra bekannt ist.

§. 28. Der specielle Fall

$$k_0 = k_1 = k_2 \dots = k_{n-1} = 0$$

verdient etwas näher betrachtet zu werden. Nach geschehener Addition ist nämlich gemäfs der vorigen Methode

$$Q_n x = 0, \quad Q_n y = 0, \dots Q_n w = 0,$$

und daraus folgt entweder

$$x = 0, \quad y = 0, \dots w = 0$$

oder

$$Q_n = 0.$$

Diefs giebt folgenden Satz: wenn den n linearen Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_0 x + b_0 y + c_0 z + \dots h_0 w = 0, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots h_1 w = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \dots h_{n-1} w = 0 \end{array}$$

noch andere Werthe als $x = y = z \dots = w = 0$ genügen sollen, so mufs die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0, & b_0, & \dots h_0 \\ a_1, & b_1, & \dots h_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & \dots h_{n-1} \end{vmatrix}$$

von selber verschwinden.

Den drei Gleichungen z. B.

$$a_0x + b_0y + c_0z = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

genügen aufser $x = y = z = 0$ nur dann noch andere Werthe, wenn

$$a_0(b_1c_2 - b_2c_1) + a_1(b_2c_0 - b_0c_2) + a_2(b_0c_1 - b_1c_0) = 0$$

ist. Das nämliche Resultat findet man auch auf dem gewöhnlichen Wege; setzt man nämlich

$$\frac{x}{z} = \xi, \quad \frac{y}{z} = \eta,$$

so hat man zwischen den zwei Unbekannten ξ und η die drei Gleichungen

$$a_0\xi + b_0\eta + c_0 = 0,$$
$$a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0,$$
$$a_2\xi + b_2\eta + c_2 = 0.$$

Die beiden ersten liefern die Werthe von ξ und η, nach deren Substitution die letzte Gleichung in die obige Bedingung übergeht.

Eine andere Form des vorigen Theoremes entsteht durch die Substitutionen

$$\frac{x}{w} = \xi, \quad \frac{y}{w} = \eta, \quad \frac{z}{w} = \zeta, \ldots \frac{v}{w} = v,$$

wobei vorausgesetzt ist, dafs $x, y, z, \ldots w$ nicht den Werth Null haben. Betrachtet man nämlich $\xi, \eta, \zeta, \ldots v$ als $n-1$ neue Unbekannte, so hat man den Satz: die $n-1$ Unbekannten $\xi, \eta, \zeta, \ldots v$ können den n linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0\xi &+ b_0\eta + \cdots + g_0v + h_0 = 0, \\ a_1\xi &+ b_1\eta + \cdots + g_1v + h_1 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1}\xi &+ b_{n-1}\eta + \cdots + g_{n-1}v + h_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

nur unter der Bedingung genügen, dafs die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0, & b_0, & \cdots g_0, & h_0 \\ a_1, & b_1, & \cdots g_1, & h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & \cdots g_{n-1}, & h_{n-1} \end{vmatrix}$$

von selber verschwindet.

§. 29. Wie in §. 27, so kommt es auch bei mehreren nichtlinearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten darauf an, aus den gegebenen Gleichungen eine neue Gleichung herzuleiten, welche nur eine Unbekannte enthält, also die übrigen Unbekannten zu eliminiren. Bevor wir an die allgemeine Lösung dieses Problemes gehen, beschäftigen wir uns erst mit einem einfachen Falle desselben.

Denkt man sich zwei Gleichungen von den Formen

1) $$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \ldots \alpha_m u^m = 0,$$

2) $$\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \ldots \beta_n u^n = 0$$

gegeben, beide nach u aufgelöst und die erhaltenen Werthe einander gleichgesetzt, so bleibt nur eine Gleichung zwischen den Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m, \beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ übrig, und diese ist das Resultat der Elimination von u aus jenen Gleichungen. Sie spricht zugleich die Bedingung aus, unter welcher die ursprünglichen zwei Gleichungen wenigstens eine gemeinschaftliche Wurzel haben, denn nur in diesem Falle ist einer der m Werthe von u aus No. 1) gleich einem der n Werthe von u aus No. 2). Das oben erwähnte Eliminationsverfahren bietet keine Schwierigkeit, wenn m und n die Zahl 2 nicht übersteigen, bei gröfseren m und n dagegen würde es bald an der Unmöglichkeit der Auflösung von Buchstabengleichungen höherer Grade scheitern. Wir gehen defshalb einen anderen Weg.

Solange man die Werthe von u nicht hat, solange sind die Potenzen

$$u^1, u^2, u^3, \ldots u^{m+n}$$

gleichfalls unbekannte Gröfsen und mögen kurz mit

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_{m+n}$$

bezeichnet werden. Die Gleichung 1) multipliciren wir nun der Reihe nach mit $u, u^2, u^3, \ldots u^n$ und stellen alle neuen Gleichungen unter einander, indem wir die eingeführte Bezeichnung anwenden; die Gleichung 2) behandeln wir ähnlich durch Multiplication mit $u, u^2, u^3, \ldots u^m$; hierdurch entstehen folgende $m + n$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_0 u_1 + \alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_3 + \ldots + \alpha_m u_{m+1} &= 0,\\
\alpha_0 u_2 + \alpha_1 u_3 + \ldots + \alpha_m u_{m+2} &= 0,\\
\alpha_0 u_3 + \ldots + \alpha_m u_{m+3} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots &\\
\alpha_0 u_m + \ldots\ldots + \alpha_m u_{m+n} &= 0;\\
\beta_0 u_1 + \beta_1 u_2 + \beta_2 u_3 + \ldots + \beta_n u_{n+1} &= 0,\\
\beta_0 u_2 + \beta_1 u_3 + \ldots + \beta_n u_{n+2} &= 0,\\
\beta_0 u_3 + \ldots\ldots + \beta_n u_{n+3} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots &\\
\beta_0 u_n + \ldots\ldots + \beta_n u_{n+m} &= 0.
\end{aligned}$$

Hierin sind die $m + n$ Unbekannten $u_1, u_2, \ldots u_{m+n}$ enthalten, und die Gleichungen sind in Beziehung auf dieselben vom ersten Grade, während rechter Hand lauter Nullen stehen. Nach dem ersten Satze des vorigen Paragraphen können diese Gleichungen nur dann zusammenexistiren, wenn entweder $u_1 = u_2 \ldots = u_{m+n} = 0$ ist, oder wenn die Determinante des Systemes verschwindet; der erste Fall findet im Allgemeinen nicht statt, mithin mufs die zweite Bedingung erfüllt sein, nämlich

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_m, & 0, & 0, & \ldots\ldots \\ 0, & \alpha_0, & \alpha_1, & \ldots\ldots & \alpha_m, & 0, & & \ldots\ldots \\ 0, & 0, & \alpha_0, & \ldots\ldots\ldots & & \alpha_m, & & \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_0, & \beta_1, & \beta_2, & \ldots & \beta_n, & 0, & 0, & \ldots\ldots \\ 0, & \beta_0, & \beta_1, & \ldots\ldots & \beta_n, & 0, & & \ldots\ldots \\ 0, & 0, & \beta_0, & \ldots\ldots\ldots & & \beta_n, & & \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Da in dieser Gleichung kein u vorkommt, so ist sie das Resultat der verlangten Elimination.

Als erstes Beispiel mögen die beiden Gleichungen

$$3)\qquad \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 = 0, \\ \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 = 0 \end{cases}$$

dienen. Die vier einzelnen Gleichungen sind hier

$$4)\qquad \begin{cases} \alpha_0 u_1 + \alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_3 & = 0, \\ \qquad \alpha_0 u_2 + \alpha_1 u_3 + \alpha_2 u_4 & = 0, \\ \beta_0 u_1 + \beta_1 u_2 + \beta_2 u_3 & = 0, \\ \qquad \beta_0 u_2 + \beta_1 u_3 + \beta_2 u_4 & = 0, \end{cases}$$

mithin ist die Schlufsgleichung

$$5)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & 0 \\ 0, & \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2 \\ \beta_0, & \beta_1, & \beta_2, & 0 \\ 0, & \beta_0, & \beta_1, & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt nach der Formel für $\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 d_3)$

$$6)\qquad (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) - (\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0)^2 = 0.$$

Da viele Glieder der Determinante 5) wegfallen, so thut man besser, die Gleichungen 4) erst zu vereinfachen, indem man aus ihnen u_4 eliminirt; es bleiben dann folgende drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_0 u_1 \quad + \quad \alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_3 & = 0, \\ \beta_0 u_1 \quad + \quad \beta_1 u_2 + \beta_2 u_3 & = 0, \\ (\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0) u_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) u_3 & = 0, \end{aligned}$$

deren Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, \\ \beta_2, & \beta_1, & \beta_2, \\ 0, & \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0, & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{vmatrix} = 0$$

bequemer entwickelbar ist und mit No. 6) übereinstimmt.

Als zweites Beispiel diene die Elimination von u aus den beiden Gleichungen

$$7)\qquad \begin{cases} a + bu + cu^2 = 0, \\ A + Bu + Cu^2 + Du^3 = 0. \end{cases}$$

Man hat hier folgende fünf Gleichungen

$$\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + cu_3 \qquad\qquad &= 0,\\
au_2 + bu_3 + cu_4 \qquad &= 0,\\
au_3 + bu_4 + cu_5 &= 0;\\
Au_1 + Bu_2 + Cu_3 + Du_4 \qquad &= 0,\\
Au_2 + Bu_3 + Cu_4 + Du_5 &= 0,
\end{aligned}$$

welche sich durch Wegschaffung von u_5 und u_4 auf drei reduciren, nämlich

$$\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + \quad + \quad cu_3 &= 0,\\
Acu_1 + (Bc - Da)u_2 + (Cc - Db)u_3 &= 0,\\
(Ac^2 - Cac + Dab)u_2 + (Bc^2 - Cbc - Dac + Db^2)u_3 &= 0;
\end{aligned}$$

setzt man zur Abkürzung

$$A' = Ac, \quad B' = Bc - Da, \quad C' = Cc - Db,$$
$$B'' = Ac^2 - Cac + Dab, \quad C'' = Bc^2 - Cbc - Dac + Db^2,$$

so ist die Determinante der letzten drei Gleichungen

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ A', & B', & C' \\ 0, & B'', & C'' \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

8) $$a(B'C'' - B''C') - A'(bC'' - cB'') = 0.$$

In dem speciellen Falle, wo die Gleichungen 7) die einfachere Form haben

$$\begin{aligned}
A + Bu + Cu^2 + Du^3 &= 0,\\
B + 2Cu + 3Du^2 &= 0,
\end{aligned}$$

geht die resultirende Gleichung 8) in die folgende über

$$54ABCD - 12AC^3 - 81A^2D^2 + 3B^2C^2 - 12B^3D = 0.$$

§. 30. Wenn aus zwei gegebenen rationalen algebraischen Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0$$

die Unbekannte y eliminirt werden soll, so ordnet man beide Gleichungen nach Potenzen von y und erhält dadurch die Formen

$$\begin{aligned}
P_0 + P_1y + P_2y^2 + \dots + P_my^m &= 0,\\
Q_0 + Q_1y + Q_2y^2 + \dots + Q_ny^n &= 0,
\end{aligned}$$

worin $P_0, P_1, \dots P_m$, sowie $Q_0, Q_1, \dots Q_n$ Functionen von x sind; die Anwendung der vorhin auseinandergesetzten Methode führt dann zu einer Gleichung, welche kein y sondern nur noch x enthält.

Um z. B. y aus den Gleichungen

1) $$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ Ax^2 + By^2 + 2Cxy + D = 0, \end{cases}$$

zu eliminiren, ordnet man erst wie folgt

$$(ax + c) + by \qquad = 0,$$
$$(Ax^2 + D) + 2Cxy + By^2 = 0;$$

diefs giebt nach der vorigen Methode

$$\begin{vmatrix} ax + c, & b, & 0 \\ 0, & ax + c, & b \\ Ax^2 + D, & 2Cx, & B \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

2) $(Ab^2 + Ba^2 - 2Cab)x^2 + 2(Ba - Cb)cx + Bc^2 + Db^2 = 0.$

Bei mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten eliminirt man mittelst desselben Verfahrens eine Unbekannte nach der anderen. Als Beispiel mag die Aufgabe dienen, aus den beiden Gleichungen

3) $$x^2 + 2y^2 = 43, \quad x^2 - xy = 10$$

eine neue Gleichung herzuleiten, welche nur die Unbekannte $2y - x$ enthält. Setzt man hier

4) $$2y - x = z,$$

so hat man drei Gleichungen mit den drei Unbekannten x, y, z, von denen die beiden ersten zu eliminiren sind. Durch Wegschaffung von x reduciren sich die vorhandenen drei Gleichungen auf folgende zwei

5) $$(z^2 - 43) - 4zy + 6y^2 = 0,$$

6) $$(z^2 - 10) - 3zy + 2y^2 = 0;$$

nach den Formeln 3) und 6) in §. 29 wird hieraus

$$(z^3 + 89z)\,10z - (4z^2 + 26)^2 = 0$$

oder

$$3z^4 - 341z^2 + 338 = 0.$$

Die Wurzeln dieser biquadratischen Gleichung sind

$$z = +1, \quad -1, \quad +\frac{26}{\sqrt{6}}, \quad -\frac{26}{\sqrt{6}};$$

ihnen entsprechen als gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichungen 5) und 6)

$$y = +3, \quad -3, \quad +\frac{11}{\sqrt{6}}, \quad -\frac{11}{\sqrt{6}},$$

woraus nach No. 4) die Werthe folgen

$$x = +5, \quad -5, \quad -\frac{4}{\sqrt{6}}, \quad +\frac{4}{\sqrt{6}}.$$

Dasselbe Verfahren kann auch zum Rationalmachen irrationaler Gleichungen benutzt werden, wie wir an dem, in §. 23 gegebenen Beispiele

$$\sqrt{Ax + a} + \sqrt[3]{Bx + b} + c = 0$$

zeigen wollen. Substituirt man nämlich

$$\sqrt{Ax+a}=y, \quad \text{mithin} \quad Ax+a=y^2,$$
$$\sqrt[3]{Bx+b}=z, \quad - \quad Bx+b=z^3,$$

so läfst sich die genannte irrationale Gleichung durch die drei rationalen Gleichungen

$$y+z+c=0,$$
$$Ax+a-y^2=0, \quad Bx+b-z^3=0$$

ersetzen, und aus den letzteren sind y und z zu eliminiren. Durch Wegschaffung von z entstehen die beiden Gleichungen

$$(Ax+a)-y^2=0,$$
$$(Bx+b+c^3)+3c^2y+3cy^2+y^3=0,$$

welche sich wie die Gleichungen 7) in §. 29 behandeln lassen, wenn man die dortigen Buchstaben

$$a, \quad b, \quad c, \quad A, \quad B, \quad C, \quad D,$$

durch

$$Ax+a, \quad 0, \quad -1, \quad Bx+b+c^3, \quad 3c^2, \quad 3c, \quad 1,$$

ersetzt. Man findet

$$A'=-(Bx+b+c^3), \quad B'=-(Ax+a+3c^2), \quad C'=-3c,$$
$$B''=(3Ac+B)x+3ac+b+c^3,$$
$$C''=Ax+a+3c^2=-B',$$

und die Gleichung 8) in §. 29 wird zur folgenden

$$(Ax+a)(Ax+a+3c^2)^2$$
$$-[(3Ac+B)x+3ac+b+c^3]^2=0,$$

welche mit No. 3) in §. 24 identisch ist.

Eine fernere Anwendung des auseinandergesetzten Eliminationsverfahrens besteht in der Berechnung der complexen Wurzeln einer gegebenen Gleichung

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

Substituirt man nämlich

$$x=u+iv$$

und fafst sowohl die reellen als die imaginären Summanden zusammen, so erhält man statt der vorigen Gleichung die folgende

$$\varphi(u, v)+i\psi(u, v)=0,$$

worin φ und ψ ganze rationale algebraische Functionen von u und v bedeuten. Die letzte Gleichung kann nur bestehen, wenn gleichzeitig

$$\varphi(u, v)=0 \quad \text{und} \quad \psi(u, v)=0$$

ist, man hat also zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Eliminirt man aus beiden einmal v, das andere Mal u, so gelangt man zu zwei Gleichungen von den Formen

$$\Phi(u)=0, \quad \Psi(v)=0,$$

wodurch sich u und v einzeln bestimmen. Dieses Verfahren ist zwar

theoretisch tadellos, für die numerische Rechnung aber zu mühsam, weil die Eliminationen in der Regel viele Weitläufigkeiten verursachen.

§. 31. Wir schliefsen mit einigen Bemerkungen über die numerische Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten, wobei es gleichgültig ist, ob jene Gleichungen algebraischer oder transcendenter Form sind. Es versteht sich von selbst, dafs man in den Fällen, wo eine der beiden Unbekannten ohne Mühe eliminirt werden kann, diese Elimination wirklich vornehmen wird, und daher bedarf nur der entgegengesetzte Fall einer Erörterung, die wir der Anschaulichkeit wegen vom geometrischen Gesichtspunkte aus vornehmen.

Denkt man sich x, y, z als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume und die Ebene xy als horizontal, so wird durch die Gleichung

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

eine gewisse Fläche charakterisirt; letztere schneidet die xy-Ebene in einer Curve, der sogenannten Horizontalspur, für welche $z = 0$ ist, mithin ist

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

die Gleichung jener Horizontalspur. Bezeichnet in ähnlicher Weise

$$\zeta = \varphi(x, y) \tag{3}$$

die Gleichung einer zweiten Fläche, so ist

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{4}$$

die Gleichung der entsprechenden Horizontalspur. Beide Horizontalspuren können einander schneiden, und für alle solche Durchschnittspunkte gelten die Gleichungen 2) und 4) zusammen, d. h. alle die Werthe von x und y, welche die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

zusammen befriedigen, lassen sich als die Coordinaten der Durchschnitte von den Horizontalspuren der beiden Flächen betrachten.

Giebt man in der Gleichung 2) dem x einen willkürlich gewählten Zahlwerth a_1, so enthält die nunmehrige Gleichung $f(a_1, y) = 0$ nur eine Unbekannte y, und daher kann man die zugehörigen Werthe von y, deren einer b_1 heifsen möge, ermitteln; damit sind soviel Punkte der ersten Horizontalspur bestimmt, als b_1 verschiedene Werthe hat. Wiederholt man diese Rechnung, indem man dem x einen zweiten Werth a_2 giebt und die zugehörigen b_2 ermittelt, so erhält man eine zweite Reihe von Punkten; so fortfahrend kann man die erste Horizontalspur durch eine beliebig grofse Anzahl einzelner Punkte bestimmen und mit beliebiger Genauigkeit graphisch darstellen. Dasselbe gilt von der zweiten Horizontalspur und dann ersieht

man aus der Zeichnung von selbst, wo die Durchschnitte beider Horizontalspuren zu suchen sind.

Nach dem Gesagten hat es keine wesentliche Schwierigkeit, Näherungswerthe für die gesuchten x und y zu finden, und es kommt jetzt nur noch darauf an, die Annäherung beliebig weit zu treiben. Zu diesem Zwecke setzen wir voraus, dafs drei Paare von Näherungswerthen x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 gefunden seien; die Functionen $f(x_1, y_1)$, $\varphi(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2)$ etc. verschwinden dann nicht, sondern erhalten gewisse, durch die Rechnung sich ergebende Werthe, die wir bezeichnen mit

5) $$\begin{cases} z_1 = f(x_1, y_1), & \zeta_1 = \varphi(x_1, y_1), \\ z_2 = f(x_2, y_2), & \zeta_2 = \varphi(x_2, y_2), \\ z_3 = f(x_3, y_3), & \zeta_3 = \varphi(x_3, y_3). \end{cases}$$

Da die drei Flächenpunkte $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ einander nahe liegen, so mufs eine durch dieselben drei Punkte gelegte Ebene sich der Fläche ziemlich eng anschliefsen, mithin auch nahezu dieselbe Horizontalspur besitzen, da überhaupt ein kleines Curvenstück näherungsweis für geradlinig gelten kann. Als Gleichung der genannten Ebene schreiben wir

$$z = ax + by + c,$$

wobei a, b, c an die Bedingungen

6) $$\begin{cases} z_1 = ax_1 + by_1 + c, \\ z_2 = ax_2 + by_2 + c, \\ z_3 = ax_3 + by_3 + c \end{cases}$$

geknüpft sind; die Gleichung der Horizontalspur dieser Ebene ist dann

7) $$0 = ax + by + c.$$

Durch die Punkte $x_1 y_1 \zeta_1$, $x_2 y_2 \zeta_2$, $x_3 y_3 \zeta_3$ legen wir aus denselben Gründen eine Ebene, deren Gleichung

$$\zeta = \alpha x + \beta y + \gamma$$

heifsen möge; es ist dann

8) $$\begin{cases} \zeta_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma, \\ \zeta_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma, \\ \zeta_3 = \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma, \end{cases}$$

und die Gleichung der entsprechenden Horizontalspur lautet

9) $$0 = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Die beiden Horizontalspuren 7) und 9) schneiden sich in einem Punkte $x_4 y_4$, dessen Coordinaten

10) $$x_4 = \frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha}, \quad y_4 = \frac{c\alpha - a\gamma}{a\beta - b\alpha}$$

ein paar neue und bessere Näherungswerthe für x und y liefern,

weil jene geradlinigen Horizontalspuren innerhalb einer kleinen Ausdehnung die krummlinigen Spuren der Flächen 2) und 4) vertreten können. Um vollständig entwickelte Formeln zu erhalten, müfste man a, b, c aus den Gleichungen 6), α, β, γ aus No. 8 bestimmen und die gefundenen Werthe in No. 10) einsetzen, kürzer ist dagegen folgender Weg. Zufolge der Gleichungen 6) und 8) erhält man leicht

$$\begin{aligned} z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2 &= (a\beta - b\alpha)(x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ &\quad + (c\alpha - a\gamma)(x_3 - x_2) + (b\gamma - c\beta)(y_2 - y_3), \\ z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3 &= (a\beta - b\alpha)(x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ &\quad + (c\alpha - a\gamma)(x_1 - x_3) + (b\gamma - c\beta)(y_3 - y_1), \\ z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1 &= (a\beta - b\alpha)(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &\quad + (c\alpha - a\gamma)(x_2 - x_1) + (b\gamma - c\beta)(y_1 - y_2); \end{aligned}$$

addirt man diese Gleichungen und setzt zur Abkürzung

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2 = S,$$

so findet man

$$11)\quad \left\{ \begin{aligned} & z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2 + z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3 + z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1 \\ & \qquad = (a\beta - b\alpha) S. \end{aligned} \right.$$

Ferner ist auch

$$\begin{aligned} & x_1(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + x_2(z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + x_3(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1) \\ & \qquad = (b\gamma - c\beta) S, \\ & y_1(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + y_2(z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + y_3(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1) \\ & \qquad = (c\alpha - a\gamma) S, \end{aligned}$$

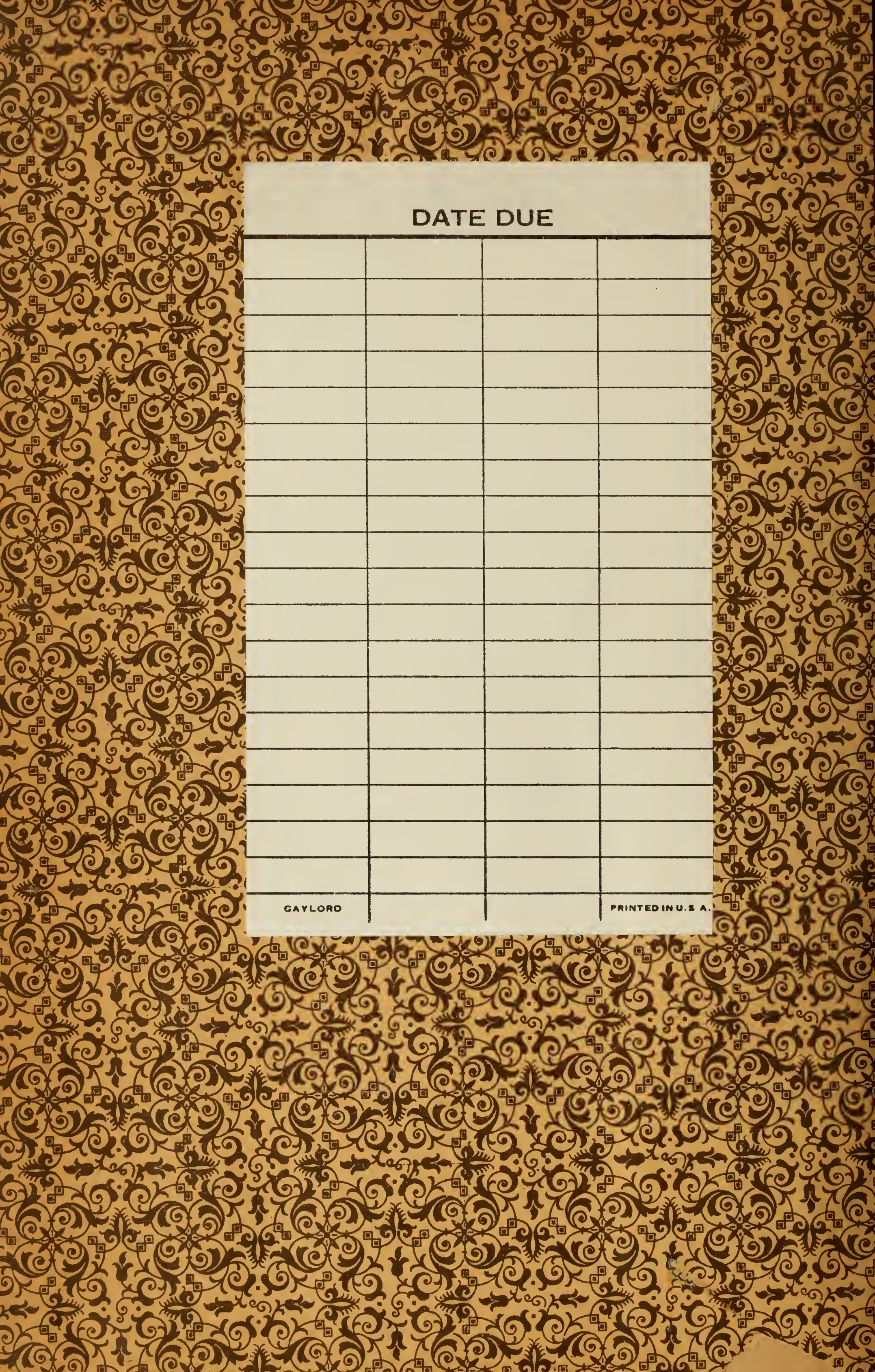
und wenn man die beiden letzten Gleichungen durch No. 11) dividirt, so erhält man dieselben Quotienten wie in No. 10), mithin

$$x_4 = \frac{x_1(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + x_2(z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + x_3(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)}{(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + (z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + (z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)},$$

$$y_4 = \frac{y_1(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + y_2(z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + y_3(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)}{(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + (z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + (z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)}$$

Durch mehrmalige Anwendung dieser Formeln, wobei jedes neue Paar von Näherungswerthen mit zwei früheren Paaren zu combiniren ist, kann man die Genauigkeit beliebig weit treiben. Dieses Verfahren ist das Seitenstück zu dem in §. 20 gezeigten und verlangt bei schwierigeren Fällen einige nähere Untersuchungen, hinsichtlich deren wir auf die schon erwähnte Scheffler'sche Abhandlung verweisen.

Druck von Ed. Frommann in Jena.



DATE DUE
GAYLORD
PRINTED IN U.S.A.



